

# Interfaces isotropo-anisotropo: un código numérico para caracterizar la reflexión y refracción

Isotropic-anisotropic interfaces: an algorithm to characterize reflection and refraction

Germán E. Caro<sup>\*1</sup>, Eduardo O. Acosta<sup>\*2</sup>, Francisco E. Veiras<sup>\*†3</sup> y Liliana I. Perez<sup>\*‡4</sup>

<sup>\*</sup>Grupo de Láser, Óptica de Materiales y Aplicaciones Electromagnéticas, Departamento de Física, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Av. Paseo Colón 850 - (C1063ACV) CABA - Argentina

<sup>†</sup>Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas

<sup>‡</sup>Universidad de Buenos Aires. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Instituto de Tecnologías y Ciencias de la Ingeniería "Hilario Fernández Long". Facultad de Ingeniería.

Av. Paseo Colón 850 - (C1063ACV) CABA - Argentina

<sup>1</sup>german.layer8@gmail.com

<sup>2</sup>eacosta@fi.uba.ar

<sup>3</sup>fveiras@fi.uba.ar

<sup>4</sup>lperez@fi.uba.ar

Recibido: 03/06/19; Aceptado: 26/09/19

**Abstract**—The detailed study of the response of anisotropic linear materials to electromagnetic fields has as one of its aims the design of new devices of interest in Optics, Optoelectronics and Electronics. In this paper we present a simple computer tool that is able to determine the characteristics of the propagation of plane waves through an isotropic-anisotropic uniaxial interface with arbitrary direction of the optical axis with respect to the direction of incidence. The algorithms were checked with the analytical results in cases where the incidence plane coincides with each of the principal planes of the crystal.

**Keywords:** anisotropy; reflection; transmission; optoelectronic devices.

**Resumen**— El estudio detallado de la respuesta de los materiales lineales anisótropos ante campos electromagnéticos tiene como uno de sus fines el de diseñar nuevos dispositivos de interés en Óptica, Optoelectrónica y Electrónica. En este trabajo presentamos una herramienta numérica sencilla que es capaz de determinar las características de la propagación de las ondas planas a través de una interfaz isotropo-anisotropo uniaxial con dirección arbitraria del eje óptico respecto a la dirección de incidencia. Los algoritmos fueron comprobados con los resultados analíticos en los casos en que el plano de incidencia coincide con cada uno de los planos principales del cristal.

**Palabras clave:** anisotropía; reflexión, transmisión; dispositivos optoelectrónicos.

## I. INTRODUCCIÓN

Las propiedades ópticas de los materiales uniaxiales ha sido estudiada desde el descubrimiento de la doble refracción en el *espató de Islandia*, realizado en 1669 por el médico y científico danés Erasmus Bertholius. Si bien describió con detalle el fenómeno, no pudo dar una explicación satisfactoria de su naturaleza física. Esta formación cristalina, llamada calcita entre los cristalógrafos, es una de las variantes en las que cristaliza el  $CaCO_3$ . La primera explicación satisfactoria se encuentra unos pocos años después al aplicar un nuevo modelo de la naturaleza de la luz: la teoría ondulatoria de la luz (defendida por Robert Hooke) que fue perfeccionada por Christian Huygens

(ambos coetáneos de Bertholius). Huygens enunció un principio (que hoy lleva su nombre) que establece que cada punto donde llega una perturbación luminosa puede ser considerada como el centro de una nueva perturbación en forma de onda esférica.

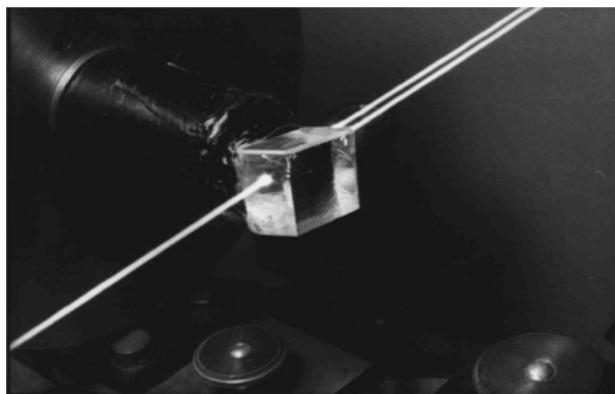


Fig. 1. Fotografía que muestra la doble refracción en un cristal de calcita (Gentileza de la Dra. María C. Simon y del Dr. Rodolfo Echarrí)

Cuando la luz incide en forma oblicua sobre un bloque uniaxial con su eje óptico dentro del plano de incidencia, los modos ordinario y extraordinario están separados. La onda ordinaria refractada en la interfaz isotropo-uniaxial está polarizada perpendicularmente al plano de incidencia (modo s o TE) y la extraordinaria paralelamente al plano de incidencia (modo p o TM). Como ambas ondas se mueven a distintas velocidades el rayo extraordinario no tiene la misma dirección que la normal extraordinaria, pero está contenido en el plano de incidencia. Como consecuencia al atravesar el bloque se transmiten dos haces paralelos como se muestra en la Figura 1.

En los últimos años la cantidad y tipo de elementos ópticos construidos con materiales anisótropos ha aumentado considerablemente en parte debido a que se han podido sintetizar muchos nuevos o poco disponibles en

la naturaleza. Esto ayudó al crecimiento del estudio de sus potencialidades y de su uso en sistemas más allá de los clásicos (polarizadores, interferómetros de polarización, láminas retardadoras, etc.). Por otra parte, algunas técnicas de fabricación de elementos ópticos producen cambios de las propiedades de los materiales isótropos convirtiéndolos en anisótropos (por ejemplo, la construcción de fibras ópticas). Estos son algunos de los motivos por los que en las últimas décadas se profundizó el estudio de las propiedades de interfaces que involucren por lo menos un medio anisótropo [1]–[6].

Una de las peculiaridades que se producen en la propagación de ondas en interfaces isótropo-uniaxial lineal, es que las ondas ordinarias se comportan similar a las de un medio isótropo; en cambio para las ondas extraordinarias las direcciones de las normales a los frentes de onda no coinciden con las respectivas direcciones de propagación de la energía (denominada rayos) y además, excepto en algunos casos particulares, el rayo no está dentro del plano de incidencia.

Como puede intuirse, el problema de reflexión y refracción en interfaces isótropo-uniaxial o uniaxial-isótropo resulta muy complejo de interpretar. Si en lugar de dos interfaces planas tuviéramos varias (multicapas anisótropas) o las superficies no fueran paralelas (como en los interferómetros de polarización) o los medios tuvieran restricciones geométricas (como en una fibra óptica), las dificultades aumentan considerablemente.

Se debe destacar que aparecen fenómenos muy particulares, aunque solo se trate de una sola interfaz isótropo-uniaxial o uniaxial-isótropo no absorbentes. Si la luz incide desde el medio isótropo, pueden desaparecer un rayo refractado (*Reflexión Total Ordinaria* o *Reflexión Total Extraordinaria*) o los dos rayos refractados [7]; que uno de los rayos refractados forme un ángulo positivo y el otro un ángulo negativo con la normal a la interfaz (*Refracción Negativa*) [8]–[15]; que el vector número de onda extraordinario tenga sentido de avance contrario al esperado, tanto para ondas reflejadas [16], [17] como refractadas [13]–[15], [17], [18] (*Onda en retroceso*) o que la polarización de la onda reflejada sea independiente de la polarización de la onda incidente (*Condición de Brewster*) [19], [20]. A su vez, si la luz incide desde el medio uniaxial no solo fenómenos semejantes estarán presentes, sino que también pueden desaparecer (no en las mismas condiciones) dos de los cuatro rayos reflejados en la interfaz uniaxial-isótropo (*Reflexión Inhibida*) [21].

Como lo muestran las experiencias desde el siglo XVII, las ondas que se propagan en el cristal están linealmente polarizadas pero no corresponden, en general, a los conocidos modos propios de los medios isótropos. Es decir, la polarización de cada una de las ondas propagantes no es cualquier polarización lineal. Esta propiedad dificulta el estudio matemático, pero al mismo tiempo es una de las ventajas de los cristales anisótropos.

En este trabajo se propone, a partir de la resolución numérica de las ecuaciones de Maxwell y relaciones constitutivas, una aproximación para determinar los campos (módulo y fase), a través del coeficiente de transmisión, y la dirección de propagación la energía de las ondas refractadas

al atravesar una interfaz isótropo-uniaxial.

## II. ONDAS EN MEDIOS ISÓTROPOS Y UNIAXIALES

Las ecuaciones de Maxwell son un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas en derivadas parciales nombradas así en honor a James C. Maxwell, quién las publicó entre 1861 y 1862 [22], [23]. Describen de forma completa todos los fenómenos electromagnéticos, entre ellos la propagación de la luz. Estas ecuaciones dan, a través del rotor y la divergencia de los campos eléctricos y magnéticos, un sistema que permite determinar exactamente los campos que pueden existir en todo punto del espacio si las propiedades electromagnéticas del medio son conocidas. Para Maxwell la ley de Faraday debía ser una propiedad de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  que no tenía nada que ver con la presencia o ausencia de un circuito por el que se midiera la corriente. Así se liberó del circuito. Postuló que la variación del flujo de  $\vec{B}$  en alguna zona (limitada o no limitada) del espacio, produce en todo punto del espacio, exista o no un circuito de prueba, un campo eléctrico inducido por el cambio de flujo de  $\vec{B}$ . En ausencia de fuentes, las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial toman la forma [24]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (1a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \mu_v \epsilon_v \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1d)$$

En el vacío, coinciden el vector magnético  $\vec{H}$  con el vector inducción  $\vec{B}$  y el vector desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  con el vector campo eléctrico  $\vec{E}$ , a menos de una constante. En el caso más general las relaciones entre estos campos está dada por

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \vec{P} \quad (2a)$$

$$\vec{B} = \mu(\vec{H} + \vec{M}) \quad (2b)$$

donde  $\vec{P}$  y  $\vec{M}$  dependen de los campos. Los medios lineales están caracterizados por  $\vec{P}$  proporcional a  $\vec{E}$  y  $\vec{M}$  a  $\vec{H}$ . En consecuencia

$$\vec{D} = \bar{\epsilon} \vec{E} \quad (3a)$$

$$\vec{B} = \bar{\mu} \vec{H} \quad (3b)$$

donde  $\bar{\epsilon}$  y  $\bar{\mu}$  son tensores y se denominan permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, respectivamente. Las relaciones entre  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  y entre  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$  se llaman relaciones constitutivas.

En medios lineales, isótropos y no absorbentes, la permitividad, que es un escalar ( $\epsilon$ ) y normalmente la permeabilidad magnética  $\mu$  es muy próxima a la del vacío ( $\mu_v$ ). En estas condiciones, lejos de las fuentes el campo  $\vec{E}$  (también para  $\vec{H}$ ) verifica la ecuación

$$\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad (4)$$

donde  $u = 1/\sqrt{\mu\epsilon} = c/n$  es la velocidad de propagación de la onda,  $c$  la velocidad de la luz en el vacío y  $n$  el índice

de refracción. La solución de esta ecuación corresponden a ondas planas de la forma

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (5)$$

$\omega$  es la frecuencia y  $\vec{k} = 2\pi/\lambda \vec{N}$  el número de onda,  $\lambda$  la longitud de onda en el medio y  $\vec{N}$  la normal a los planos de fase constante (frentes de onda).

La propagación de la energía está dada por el vector de Poynting  $\vec{S}$  [24]

$$\vec{S} = \Re(\vec{E}) \times \Re(\vec{H}) = \frac{1}{\mu_0 \omega} E_0^2 \vec{k} \quad (6)$$

Identificamos con la palabra *rayo*, tan usada en Óptica Geométrica, a la dirección del promedio temporal del vector de Poynting, entonces la dirección del rayo  $\vec{R} = \check{S}$ .

En los medios lineales con anisotropía eléctrica, la permitividad eléctrica del medio no será un escalar, sino un tensor  $\bar{\epsilon}$  de rango 2 y en general el vector  $\vec{D}$  no estará en la dirección del campo  $\vec{E}$  [25]. Como  $\bar{\epsilon}$  es simétrico, existe un sistema de coordenadas privilegiado propio del cristal, llamado sistema de coordenadas principal del cristal ( $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3$ ), en el cual dicho tensor es diagonal. En el caso de los cristales uniaxiales existe una única dirección preferencial llamada eje óptico  $\hat{z}_3$ , y en el sistema de ejes principales el tensor dieléctrico tiene una expresión más sencilla:

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_o & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_o & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_e \end{pmatrix} \quad (7)$$

donde  $\epsilon_o$  y  $\epsilon_e$  son las permitividades eléctricas principal ordinaria y principal extraordinaria, respectivamente. La permitividad (autovalor)  $\epsilon_e$  está asociada al autovector  $\hat{z}_3$ . Esta forma de escribir el tensor dieléctrico permite obtener una ecuación semejante a la ecuación de ondas (4) para las componentes de los campos en el sistema de ejes principales

$$\frac{1}{u_o^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} - \nabla^2 E_1 = 0 \quad (8a)$$

$$\frac{1}{u_o^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} - \nabla^2 E_2 = 0 \quad (8b)$$

$$\frac{1}{u_e^2} \frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2} - \nabla^2 E_3 = 0 \quad (8c)$$

Como se ve en estas últimas ecuaciones las velocidades de fase  $u_o = 1/\sqrt{\mu\epsilon_o} = c/n_o$  y  $u_e = 1/\sqrt{\mu\epsilon_e} = c/n_e$  no son iguales para todas las componentes y en consecuencia no es una verdadera ecuación de onda.  $n_o$  y  $n_e$  son los índices de refracción principales ordinario y extraordinario.

A pesar de que la ecuación (8) no es una ecuación de onda se pueden proponer soluciones de onda plana y determinar las condiciones que deben cumplir. Si se utilizan las ecuaciones de Maxwell lejos de las fuentes y las relaciones constitutivas se obtienen las relaciones entre la dirección de la normal al frente de onda  $\vec{N}$  y los campos asociados  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$  [26]

$$\check{N} \times \vec{H} = -u \vec{D} \quad (9a)$$

$$\check{N} \times \vec{E} = \mu_o u \vec{H} \quad (9b)$$

$$\check{N} \cdot \vec{D} = 0 \quad (9c)$$

$$\check{N} \cdot \vec{E} = 0 \quad (9d)$$

Combinando estas ecuaciones se obtiene

$$\mu_o v^2 \vec{D} = \vec{E} - (\check{N} \cdot \vec{E}) \check{N} \quad (10)$$

Reemplazando  $\vec{E}$  en función de  $\vec{D}$  en el sistema de ejes principales y usando las ecuaciones constitutivas se llega a un sistema de tres ecuaciones. Sus incógnitas son las velocidades de propagación de la onda  $v$  y las componentes del campo  $\vec{D}$  en el sistema de ejes principales del cristal ( $D_j = \vec{D} \cdot \hat{z}_j$  y  $N_j = \check{N} \cdot \hat{z}_j$  con  $j = 1, 2$  ó  $3$ )

$$(v^2 - u_j^2) D_j + \left( \sum_{i=1}^3 u_i^2 N_i D_i \right) N_j = 0 \quad (11)$$

Este sistema de ecuaciones es similar a un problema de autovectores y autovalores, donde el autovalor es la velocidad de propagación de la onda y el autovector las componentes del campo  $\vec{D}$ . Resolviendo el sistema se obtienen dos posibles soluciones para la velocidad de fase [27]

$$u' = u_o \quad (12)$$

$$u'' = \sqrt{u_e^2 + (u_o^2 - u_e^2) N_3^2} \quad (13)$$

$u'$  se asocia a una onda denominada onda ordinaria, y es independiente de la dirección de avance del frente de ondas.  $u''$  se asocia a una onda denominada onda extraordinaria, y su velocidad de propagación depende de la dirección de avance del frente de onda y de la dirección relativa del eje óptico del cristal.

Introduciendo  $u'$  y  $u''$  en (11) se pueden calcular las componentes del campo  $\vec{D}$  para cada velocidad. Estos son los modos propios en un medio uniaxial (ordinario y extraordinario), en analogía con los modos  $s$  y  $p$  de un medio isotropo.

Para la onda ordinaria se deduce que  $\vec{E}_o$  y  $\vec{D}_o$  son paralelos entre sí y perpendiculares al plano definido por el eje óptico  $\hat{z}_3$  y el vector  $\vec{N}$ . Resulta entonces que la dirección del vector de Poynting  $\hat{S}_o$ , es decir la dirección del rayo ordinario (dirección de propagación de la energía), coincide con la dirección de avance del frente de ondas  $\vec{N}_o$ .

$$\hat{R}_o = \vec{N}_o \quad (14)$$

En cambio para la onda extraordinaria la dirección de propagación de la energía ( $\hat{S}_e$ ) no coincide con la dirección de avance del frente de onda ( $\vec{N}_e$ ), sino que esta depende del mismo y de la dirección del eje óptico, dado por la relación

$$\hat{R}_e = \frac{1}{f_e} (n_o^2 \vec{N}_e + \vec{V}_3) \quad (15)$$

donde  $\vec{V}_3 = (n_e^2 - n_o^2) (\vec{N}_e \cdot \hat{z}_3) \hat{z}_3$  es un vector en la dirección del eje óptico y  $f_e^2 = n_o^4 + (n_e^4 - n_o^4) (\vec{N}_e \cdot \hat{z}_3)^2$  es un factor de normalización.

Esto quiere decir que el rayo asociado a la onda extraordinaria puede escribirse como un vector en la dirección de  $\vec{N}_e$  y otro en la dirección de  $\hat{z}_3$ . Además, la onda extraordinaria está linealmente polarizada siendo  $\vec{D}_e$ ,  $\vec{E}_e$ ,  $\hat{N}_e$  y  $\hat{z}_3$  coplanares. En este caso la normal al frente de ondas y el rayo no coinciden en general, salvo que la dirección del eje óptico y la dirección de la normal al frente de ondas sean paralelas o perpendiculares.

## A. Reflexión y refracción en interfaces planas

La geometría usada se muestra en la Figura 2. Consideremos una interfaz (de normal  $\hat{x}$ ) formada por un medio isótropo de índice de refracción  $n$  y un cristal uniaxial de índices principales ordinario y extraordinario  $n_o$  y  $n_e$  con el eje óptico en la dirección  $\hat{z}_3$  sin ninguna orientación en particular. Sin pérdida de generalidad, se hace coincidir al eje  $\hat{z}_2$  con  $\hat{y}$ . Se define el plano de incidencia al que contiene la normal a la interfaz  $\hat{x}$  y el rayo incidente  $\check{S}$  y forma un ángulo  $\delta$  con el plano que contiene al eje óptico y a la normal a la interfaz. Cuando la luz incide desde un medio isótropo llamaremos  $\alpha$  al ángulo de incidencia. Con esta convención  $\delta = 0^\circ$  corresponde al caso en el que el eje óptico se encuentra contenido el plano de incidencia, y  $\delta = 90^\circ$ ,  $\theta = 0^\circ$  aquél en que el eje óptico es perpendicular al plano de incidencia.

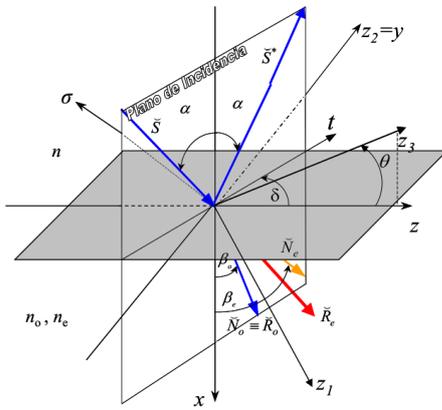


Fig. 2. Sistema de coordenadas empleado. El plano  $yz$  representa a la interfaz plana. El plano de incidencia está caracterizado por  $\delta$ .  $\check{S}$  rayo incidente,  $\check{S}^*$  rayo reflejado,  $\check{R}_o$  y  $\check{R}_e$  los rayos transmitidos ordinarios y extraordinarios.

Como el rayo incidente es:

$$\check{S} = \cos\alpha\hat{x} + \sin\alpha\sin\delta\hat{y} + \sin\alpha\cos\delta\hat{z} \quad (16)$$

entonces el campo incidente se puede escribir como:

$$\vec{E} = -\left(\frac{S_y}{S_x}E_y + \frac{S_z}{S_x}E_z\right)\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z} \quad (17a)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\left[-S_zE_y\hat{x} + S_xE_y\hat{z} - \left(S_xE_z + S_z\left(\frac{S_y}{S_x}E_y + \frac{S_z}{S_x}E_z\right)\right)\hat{y}\right] \quad (17b)$$

mientras que los campos reflejados se calculan de la misma manera teniendo en cuenta que las componentes  $\hat{x}$  de  $\check{S}$  son del signo opuesto.

$$\vec{E}^* = \left(\frac{S_y}{S_x}E_y^* + \frac{S_z}{S_x}E_z^*\right)\hat{x} + E_y^*\hat{y} + E_z^*\hat{z} \quad (18a)$$

$$\vec{H}^* = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\left[-S_zE_y^*\hat{x} - S_xE_y^*\hat{z} + \left(S_xE_z^* + S_z\left(\frac{S_y}{S_x}E_y^* + \frac{S_z}{S_x}E_z^*\right)\right)\hat{y}\right] \quad (18b)$$

Las componentes tangenciales de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  en la interfaz son continuas, así como las componentes normales

de  $\vec{D}$  y  $\vec{B}$ . De acuerdo a la Figura 2 la normal a la interfaz es  $\hat{x}$  y estas condiciones pueden escribirse como

$$(\vec{D}^2 - \vec{D}^1) \cdot \hat{x} = 0 \quad (19a)$$

$$(\vec{B}^2 - \vec{B}^1) \cdot \hat{x} = 0 \quad (19b)$$

$$\hat{x} \times (\vec{E}^2 - \vec{E}^1) = 0 \quad (19c)$$

$$\hat{x} \times (\vec{H}^2 - \vec{H}^1) = 0 \quad (19d)$$

donde el supraíndice 1 indica a los campos totales en el medio desde el que incide la onda y el supraíndice 2 a los campos transmitidos.

Si una onda plana incide en una interfaz isótropo-uniaxial habrá una onda reflejada en la dirección  $\check{S}^*$  que forma un ángulo  $\alpha$  con la normal; pero la existencia de dos velocidades de fase en el medio uniaxial da lugar a la posibilidad de que aparezcan dos ondas refractadas: la onda ordinaria con normal al frente de ondas  $\check{N}_o$  y velocidad de fase  $u_o$  y la onda extraordinaria con normal al frente de onda  $\check{N}_e$  y velocidad de fase  $u''$ .

Aplicando las condiciones de contorno (19) se obtiene

$$\vec{D} \cdot \hat{x} + \vec{D}^* \cdot \hat{x} = \vec{D}_o \cdot \hat{x} + \vec{D}_e \cdot \hat{x} \quad (20a)$$

$$\vec{E} \cdot \hat{y} + \vec{E}^* \cdot \hat{y} = \vec{E}_o \cdot \hat{y} + \vec{E}_e \cdot \hat{y} \quad (20b)$$

$$\vec{E} \cdot \hat{z} + \vec{E}^* \cdot \hat{z} = \vec{E}_o \cdot \hat{z} + \vec{E}_e \cdot \hat{z} \quad (20c)$$

$$\vec{H} \cdot \hat{y} + \vec{H}^* \cdot \hat{y} = \vec{H}_o \cdot \hat{y} + \vec{H}_e \cdot \hat{y} \quad (20d)$$

donde los campos con un asterisco indican que corresponden a la onda reflejada, y los subíndices  $o$  y  $e$  que corresponde a la ordinaria y extraordinaria respectivamente.

Para simplificar los cálculos se propone otro sistema de coordenadas llamado sistema de incidencia. En este sistema el plano  $\hat{x}, \hat{t}$  es el plano que contiene al rayo incidente y el plano  $\hat{\sigma}, \hat{t}$  es el plano que separa ambos medios. El sistema de ecuaciones (20) puede ser escrito en función de los rayos ( $\check{S}$  y  $\check{S}^*$ ) y las normales a los frentes de onda ( $\check{N}_o$  y  $\check{N}_e$ ):

$$\check{S}^* \cdot \hat{\sigma} = 0 \quad (21a)$$

$$\check{S}^* \cdot \hat{t} = \check{S} \cdot \hat{t} \quad (21b)$$

$$\frac{1}{u_o}(\check{N}_o \cdot \hat{\sigma}) = 0 \quad (21c)$$

$$\frac{1}{u_o}(\check{N}_o \cdot \hat{t}) = \frac{1}{u}(\check{S} \cdot \hat{t}) \quad (21d)$$

$$\frac{1}{u''}(\check{N}_e \cdot \hat{\sigma}) = 0 \quad (21e)$$

$$\frac{1}{u''}(\check{N}_e \cdot \hat{t}) = \frac{1}{u}(\check{S} \cdot \hat{t}) \quad (21f)$$

A partir de las ecuaciones (21a) y (21b) se muestra que el rayo reflejado está contenido en el plano de incidencia, siendo el ángulo de incidencia igual al ángulo de reflexión (a menos de un signo).

Partiendo las ecuaciones (21c) y (21d) se puede determinar la dirección de la normal refractada ordinaria donde, como en las interfaces entre medios isótropos, resulta

$$\sin\beta_o = \frac{n}{n_o}\sin\alpha \quad (22)$$

siendo  $\beta_o$  el ángulo entre la normal a la interfaz y la onda refractada ordinaria (Figura 2).

La ecuación (21e) indica que la normal al frente de ondas extraordinario también pertenece al plano de incidencia, de manera que

$$\check{N}_e = (\check{N}_e \cdot \hat{t})\hat{t} + (\check{N}_e \cdot \hat{x})\hat{x} \quad (23)$$

y a partir de la ecuación (21f) se puede obtener una ley de Snell generalizada [27]

$$\sin \beta_e = \frac{n}{n''} \sin \alpha \quad (24)$$

donde  $n''$  será el cociente entre la velocidad de fase de la luz en el vacío y la velocidad de propagación de la onda extraordinaria, ecuación (13), y dependerá de la dirección de propagación de la onda según

$$n'' = \frac{n_o n_e}{[n_o^2 + (n_e^2 - n_o^2)(\check{N}_e \cdot \hat{z}_3)^2]^{1/2}} \quad (25)$$

Puede también hallarse la relación de dispersión, que para la onda ordinaria resulta

$$k_{ox}^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_o^2 = \mu\omega^2\epsilon_o \quad (26)$$

mientras que para la onda extraordinaria corresponde a [28]

$$k_{ex}^2 h_x + 2k_{ex}k_{ez}h_{xz} + n_o^2 k_y^2 + k_z^2 h_z = \mu\omega^2 n_o^2 n_e^2 \quad (27)$$

donde se usó que  $k_{oy} = k_{ey} = k_y$  y  $k_{oz} = k_{ez} = k_z$  y se usó la notación de la Ref. [29]

$$h_x = [n_o^2 (\hat{z}_3 \cdot \hat{z})^2 + n_e^2 (\hat{z}_3 \cdot \hat{x})^2] \quad (28a)$$

$$h_{xz} = (n_e^2 - n_o^2) (\hat{z}_3 \cdot \hat{z}) (\hat{z}_3 \cdot \hat{x}) \quad (28b)$$

$$h_z = [n_o^2 (\hat{z}_3 \cdot \hat{x})^2 + n_e^2 (\hat{z}_3 \cdot \hat{z})^2] \quad (28c)$$

Si bien de (27) se obtienen dos soluciones para  $k_{ex}$ , la condición de que la energía se propague en la dirección  $\hat{x}$  positiva lleva a [13]

$$k_{ex} = \frac{-k_z h_{xz} + \sqrt{(n_e^2 k_o^2 - n_o^2 k_y^2) h_x - n_o^2 n_e^2 k_z^2}}{h_x} \quad (29)$$

Se definen los coeficientes de reflexión y transmisión como la relación entre los modos propios del medio isotrópico ( $s$  y  $p$ ) y los del cristal uniaxial ( $o$  y  $e$ ):

$$\begin{bmatrix} E_s^* \\ E_p^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ss} & R_{ps} \\ R_{sp} & R_{pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_s \\ E_p \end{bmatrix} \quad (30a)$$

$$\begin{bmatrix} E_o^T \\ E_e^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{so} & T_{po} \\ T_{se} & T_{pe} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_s \\ E_p \end{bmatrix} \quad (30b)$$

A continuación se presentan las soluciones analíticas para los campos reflejados y transmitidos en interfaces de este tipo en dos situaciones: cuando el eje óptico está contenido en el plano de incidencia ( $\delta = 0^\circ$ ) y cuando el eje óptico es perpendicular al plano de incidencia ( $\delta = 90^\circ$  y  $\theta = 0^\circ$ ). Estos planos se llaman planos principales del cristal y los modos ordinario y extraordinario son ortogonales. En la primera geometría ( $\delta = 0^\circ$ ) el modo ordinario es  $s$  y el extraordinario  $p$ ; mientras que en el otro plano principal ( $\delta = 90^\circ$ ) el ordinario es  $p$  y el extraordinario es  $s$ .

### B. Eje óptico contenido en el plano de incidencia

Si una onda incide desde un medio isotrópico y está contenida en este plano principal (fig 2)  $\hat{t}$  coincide con  $\hat{y}$  y  $\hat{o}$  coincide con  $\hat{z}$ ; además el eje óptico verifica que:

$$\hat{z}_3 = -\sin\theta \hat{x} + \cos\theta \hat{z} \quad (31)$$

Resolviendo la ecuación (11) para el caso ordinario ( $v = u_o$ ):

$$\vec{D}_o \cdot \hat{z}_1 = \vec{D}_o \cdot \hat{z}_3 = 0 \quad (32a)$$

$$\vec{D}_o \cdot \hat{z}_2 = \vec{D}_o \cdot \hat{y} \quad (32b)$$

se llega a que solo hay campo eléctrico ordinario en la dirección  $\hat{y}$  y magnético en  $\hat{x}$  y  $\hat{z}$

$$\vec{E}_o = E_{oy}\hat{y} \quad (33a)$$

$$\vec{H}_o = \frac{1}{\mu\omega} (-k_z E_{oy}\hat{x} + k_{ox} E_{oy}\hat{z}) \quad (33b)$$

y para el caso extraordinario ( $v = u''$ ) la ecuación característica queda:

$$\vec{D}_e \cdot \hat{z}_2 = 0 \quad (34a)$$

$$\vec{D}_e \cdot \hat{z}_1 = -\frac{\check{N}_e \cdot \hat{z}_3}{\check{N}_e \cdot \hat{z}_1} \vec{D}_e \cdot \hat{z}_3 \quad (34b)$$

Haciendo todo lo mismo para el extraordinario se llega a

$$\vec{E}_e = E_{ex}\hat{x} + \Gamma_e E_{ex}\hat{z} \quad (35a)$$

$$\vec{H}_e = \frac{1}{\mu\omega} (k_z - k_{ex}\Gamma_e) E_{ex}\hat{y} \quad (35b)$$

con  $\Gamma_e = (h_x k_{ex} + h_{xz} k_z) / (h_{xz} k_{ex} + h_z k_z)$  y  $\check{R}_e$  se calcula usando la ecuación (15).

Los coeficientes de reflexión y transmisión definidos en (30) resultan

$$R_{ss} = \frac{k_x - k_{ox}}{k_{ox} + k_x} \quad (36a)$$

$$R_{pp} = \frac{n^2 (h_x k_{ex} + h_{xz} k_z) - k_{ex} n_o^2 n_e^2}{n^2 (h_x k_{ex} + h_{xz} k_z) + k_{ex} n_o^2 n_e^2} \quad (36b)$$

$$T_{ss} = \frac{2k_x}{k_{ox} + k_x} \quad (36c)$$

$$T_{pp} = \frac{2n^2 (h_x k_{ex} + h_{xz} k_z)}{n^2 (h_x k_{ex} + h_{xz} k_z) + n_o^2 n_e^2 k_{ex}} \quad (36d)$$

$$R_{ps} = R_{sp} = T_{ps} = T_{sp} = 0 \quad (36e)$$

Se observa que en esta situación los modos están separados; el campo extraordinario solo depende del campo incidente polarizado en  $p$  y el campo ordinario solo del campo incidente polarizado en  $s$ . Esta separación de modos no se da en el caso más general. Además, los coeficientes de reflexión y transmisión asociados al modo ordinario (ecs. 36) son idénticos al caso de una interfaz isotrópico-isotrópico para la polarización  $s$  con índice de refracción  $n_o$ . En cambio el resultado para la polarización  $p$  no puede ser asociada a un medio isotrópico.

C. Eje óptico perpendicular al plano de incidencia

En este caso,  $\hat{t}$  coincide con  $\hat{y}$  y  $\hat{\sigma}$  coincide con  $\hat{z}$  y usando la ecuación (16) con  $\delta = 0$  se observa que  $\check{S} \cdot \hat{z} = 0$ ; por otro lado el eje óptico verifica que

$$\hat{z}_3 = \hat{x} \quad (37)$$

Resolviendo la ecuación (20) y usando que  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ , se llega a

$$-\frac{k_y}{k_x} \epsilon E_y + \frac{k_y}{k_x} \epsilon E_y^* = -\frac{k_{oy}}{k_{ox}} \epsilon_o E_{oy} \quad (38a)$$

$$E_y + E_y^* = E_{oy} \quad (38b)$$

$$E_z + E_z^* = E_{ez} \quad (38c)$$

$$-k_x E_z + k_x E_z^* = -k_{ex} E_{ez} \quad (38d)$$

resolviendo se llega a que la onda ordinaria es

$$\vec{E}_o = -\frac{k_{oy}}{k_{ox}} E_{oy} \hat{x} + E_{oy} \hat{y} \quad (39a)$$

$$\vec{H}_o = \frac{\omega \epsilon_o}{k_{ox}} E_{oy} \hat{z} \quad (39b)$$

$$\vec{N}_o = \check{N}_o = \cos \beta_o \hat{x} + \sin \beta_o \hat{z} \quad (39c)$$

y la onda extraordinaria

$$\vec{E}_e = E_{ez} \hat{z} \quad (40a)$$

$$\vec{H}_e = \frac{1}{\mu \omega} (k_{ey} E_{ez} \hat{x} - k_{ex} E_{ez} \hat{y}) \quad (40b)$$

$$\vec{N}_e = \cos \beta_e \hat{x} + \sin \beta_e \hat{z} \quad (40c)$$

Para este caso los coeficientes de reflexión y transmisión definidos en (30) resultan

$$R_{ss} = \frac{k_x - k_{ex}}{k_x + k_{ex}} \quad (41a)$$

$$R_{pp} = \frac{n_o^2 k_{ox} - n_e^2 k_x}{n_o^2 k_x + n_e^2 k_{ox}} \quad (41b)$$

$$T_{ss} = \frac{2k_x}{k_x + k_{ex}} \quad (41c)$$

$$T_{pp} = \frac{2n_o^2 k_{ox}}{n_o^2 k_{ox} + n_e^2 k_x} \quad (41d)$$

$$R_{ps} = R_{sp} = T_{ps} = T_{sp} = 0 \quad (41e)$$

III. DESCRIPCIÓN DE LA HERRAMIENTA COMPUTACIONAL

Se desarrolló un código numérico que, a partir de la dirección de propagación del rayo incidente, su polarización y su amplitud, calcula los campos reflejados y transmitidos a través de una interfaz entre un medio isótropo y uno uniaxial. El programa admite una dirección arbitraria para el rayo incidente, para el eje óptico y valores de los índices de refracción del medio isótropo, principal ordinario y principal extraordinario.

Se parte de una onda que incide con una dada dirección de propagación  $\check{N}$  desde un medio isótropo y polarización lineal arbitraria. La onda incide desde un medio con índice de refracción  $n$  a un medio uniaxial que tiene índices principales ordinario  $n_o$  y extraordinario  $n_e$  y dirección del eje óptico arbitraria. El rayo incidente forma un ángulo  $\alpha$  con la normal a la interfaz y el plano de incidencia forma un ángulo  $\delta$  con respecto al plano  $xz$  (Figura 2).

El software desarrollado trabaja con el campo eléctrico, mientras que las condiciones de contorno ecuaciones (19) requieren conocer los vectores desplazamiento y campo magnético. Es posible relacionar a estos con el campo eléctrico utilizando las relaciones constitutivas (2b) así como la ecuación (9b). De esta manera es posible escribir las condiciones de contorno únicamente con las componentes del campo eléctrico como incógnita.

El programa utiliza el sistema de coordenadas fijo al laboratorio  $xyz$  y no la de los planos principales para obtener los resultados. El tensor dieléctrico  $\bar{\epsilon}$  en el sistema  $xyz$  puede obtenerse rotando el mismo escrito en el sistema de ejes principales.

$$\bar{\epsilon} = \bar{Q} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_o & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_o & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_e \end{pmatrix} \cdot \bar{Q}^T \quad (42)$$

donde  $\bar{Q}$  es la matriz de rotación del sistema  $xyz$  al de los planos principales  $z_1 z_2 z_3$

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} \hat{x} \cdot \hat{z}_1 & \hat{y} \cdot \hat{z}_1 & \hat{z} \cdot \hat{z}_1 \\ \hat{x} \cdot \hat{z}_2 & \hat{y} \cdot \hat{z}_2 & \hat{z} \cdot \hat{z}_2 \\ \hat{x} \cdot \hat{z}_3 & \hat{y} \cdot \hat{z}_3 & \hat{z} \cdot \hat{z}_3 \end{pmatrix}$$

Si  $\vec{E}_i, \vec{E}^*, \vec{E}_o$  y  $\vec{E}_e$  los campos eléctricos incidente, reflejado y transmitido ordinario y extraordinario;  $\check{N}, \check{N}^*, \check{N}_o$  y  $\check{N}_e$  las normales a los frentes de onda de las ondas incidente, reflejada, transmitida ordinaria y extraordinaria.

Para conocer los campos  $\vec{E}^*, \vec{E}_o$  y  $\vec{E}_e$  se requieren 9 ecuaciones y para relacionar los campos eléctricos con los magnéticos es necesario conocer las normales a los frentes de onda  $\check{N}^*, \check{N}_o$  y  $\check{N}_e$  que requieren 6 ecuaciones adicionales. Las condiciones de contorno (19) proporcionan 4 ecuaciones; la ecuación característica (11) 2 ecuaciones cuando  $u = u_o$  y otras 2 cuando  $u = u''$ ; 1 ecuación proviene de que para el campo reflejado en el medio isótropo vale:

$$\check{N}^* \cdot \vec{E}^* = 0 \quad (43)$$

Las ecuaciones restantes provienen del hecho que las normales a los frentes de ondas están en el plano de incidencia y de la ley de Snell (22) y la ley de Snell generalizada (24). No obstante, la ley de Snell generalizada no es suficiente para conocer  $\check{N}_e$ , ya que esta ecuación está multivaluada. Es por esto que la ecuación (24) se resuelve numéricamente usando la librería de Phyton numpy. Para conocer cuál de las soluciones que se obtiene es la que tiene sentido físico deben calcularse  $\check{S}_e$  para saber cuál de las soluciones es la asociada a un rayo transmitido que vaya en sentido  $\hat{x}$  positivo.

IV. VERIFICACIÓN DEL FUNCIONAMIENTO

La verificación del correcto funcionamiento de las rutinas numéricas se realizó a través de la comprobación de los resultados analíticos de las direcciones de las normales de los frentes de onda y los rayos asociados cuando la incidencia se produce en el plano principal que contiene al eje óptico, y de los coeficientes de reflexión y transmisión para interfaces isótropo-uniaxial cuando la incidencia se produce en cualquiera de los planos principales.

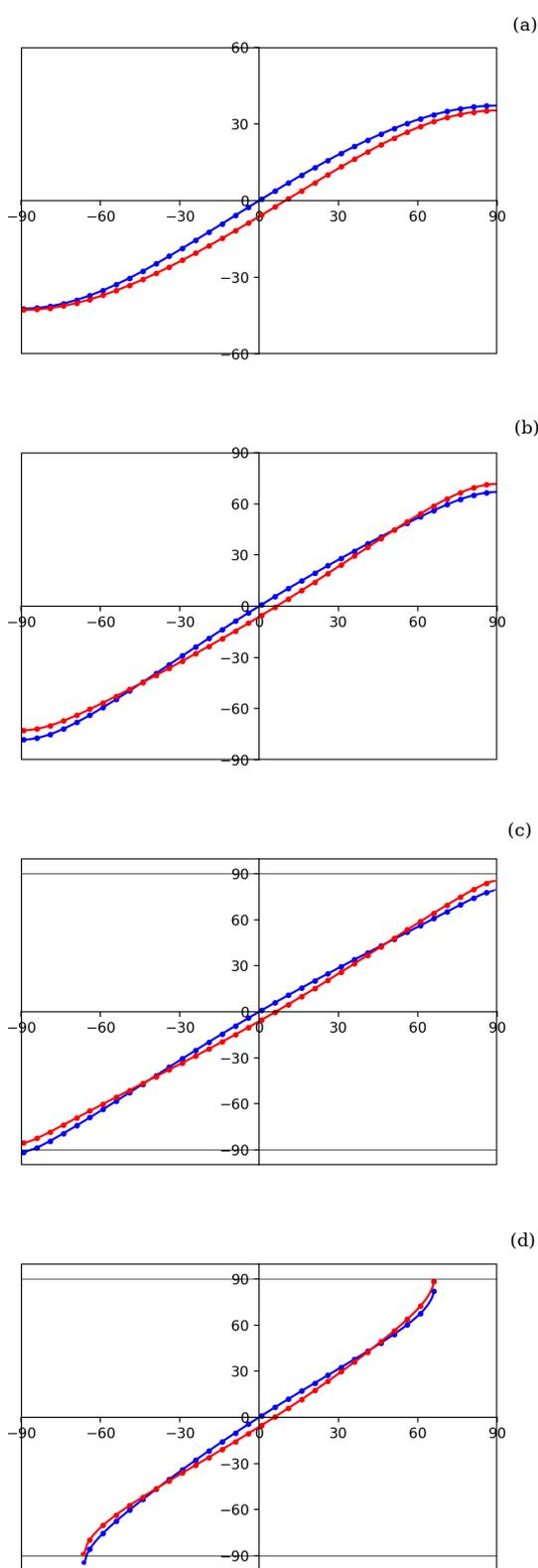


Fig. 3. Ángulo de transmisión en una capa isotrópico - uniaxial para la dirección de avance del frente de onda extraordinario (azul) y el rayo (rojo). El medio isotrópico es aire y el cristal es calcita. Los puntos son soluciones numéricas y las líneas pintadas las soluciones teóricas. a)  $n = 1$ , b)  $n = 1.5$ , c)  $n = 1.57$ , d)  $n = 1.7231$

A. Cálculo de normales a los frentes de onda y rayos

Si se considera el caso particular en el que el eje óptico está contenido en el plano de incidencia, se puede comparar

el ángulo que forma la normal al frente de onda ordinario  $\check{N}_o$ , extraordinario  $\check{N}_e$  y del rayo extraordinario  $\check{S}_e$  con la normal a la interfaz  $\hat{x}$  teóricos con los resultados numéricos. Para las figuras (3a), (3b), (3c) y (3d) se consideró al eje óptico en el plano de incidencia formando un ángulo de  $45^\circ$  con la interfaz ( $\theta = -45^\circ$ ) e índices principales  $n_e = 1.4864$  y  $n_o = 1.6584$ . En todos los casos se observa la coincidencia entre los valores analíticos y los numéricos.

En la figura (3a) calculada con  $n = 1$  se observa que los ángulos que forman el rayo y la normal al frente de ondas extraordinarios son de signo contrario en un intervalo de  $\alpha = 0^\circ$  a  $10^\circ$ . En este intervalo las componentes paralelas a la interfaz de los rayos incidente y refractado son de signo opuesto, fenómeno conocido como birrefringencia negativa [13]. En cambio, para el resto de los ángulos de incidencia, el rayo incidente y el rayo transmitido están contenidos en distintos semiplanos de incidencia.

La figura (3b) muestra el mismo resultado cuando el medio desde el cual incide la luz es un vidrio de índice  $n = 1.5$  a  $632.8nm$  (CORNING, EAGLE XG). A pesar de que  $n < n_e$ , no existe ángulo de reflexión total para el rayo extraordinario pero sí se observa el fenómeno de refracción negativa.

Cuando  $n = 1.57$  (SCHOTT, BaK), el rayo extraordinario tampoco llega a sufrir reflexión total y también existe refracción negativa para ángulos de incidencia positivos próximos a la incidencia normal (3c). En esta figura también puede observarse que para ángulos de incidencia negativos la normal al frente de ondas extraordinario puede formar un ángulo mayor a  $90^\circ$  (es decir, su dirección es tal que la normal de la onda refractada se orienta hacia el medio isotrópico) aunque, como corresponde físicamente, el sentido de propagación de la energía es el esperado. Este fenómeno es conocido como onda en retroceso.

Por último, en la figura (3d) se eligió  $n = 1.7231$  (SCHOTT, N-SF10). Para este material se produce reflexión total extraordinaria para ángulos de incidencia  $|\alpha| > 66.05^\circ$ , mientras que la normal al frente de ondas se hace rasante para  $|\alpha| = 65.3^\circ$ . Para ángulos de incidencia comprendidos entre  $65.30^\circ$  y  $66.05^\circ$  hay rayo refractado y onda en retroceso. Cuando el ángulo de incidencia es mayor que el de reflexión total extraordinaria, el rayo es rasante mientras que la normal al frente de ondas resulta complejo. El otro plano principal no brinda información ya que no existe onda en retroceso ni refracción negativa.

B. Cálculo de coeficiente de reflexión y transmisión

Pueden compararse los coeficientes de transmisión y reflexión calculados a partir de las ecuaciones (36) con los resultados numéricos de los campos.

Si se incide desde el aire ( $n = 1$ ) a un cristal de calcita para el caso en que el eje óptico está contenido en el plano de incidencia los resultados se muestran en la figura (4). Las líneas azules corresponde a los resultados analíticos y los puntos son datos numéricos; se puede observar que los valores coinciden.

En la Figura (5) se grafican los coeficientes de reflexión y transmisión para el caso de una interfaz vidrio denso ( $n = 1.7$ ) - calcita para el caso en que el eje óptico está contenido en el plano de incidencia. Se observa que hay

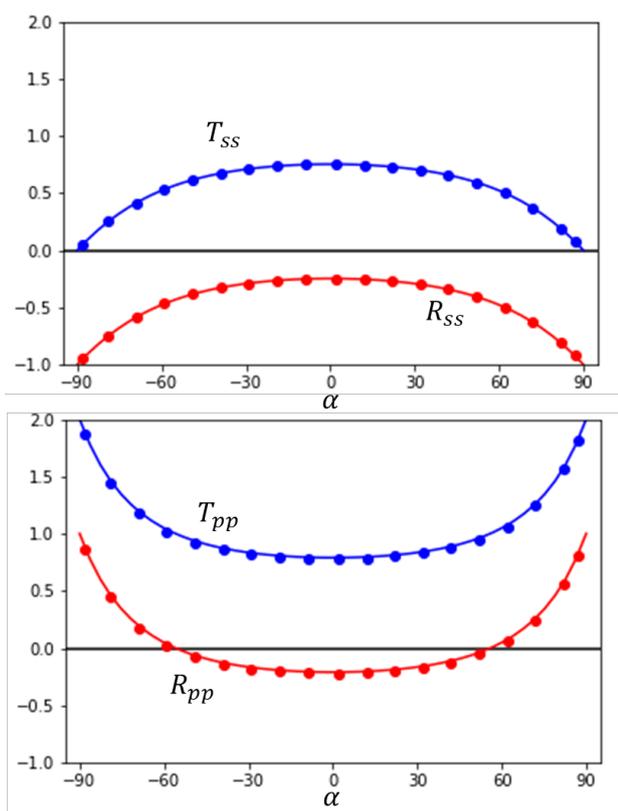


Fig. 4. Coeficientes de reflexión y transmisión en una interfaz aire-calcita con  $\delta = 0^\circ$  con  $\theta = 45^\circ$  en función del ángulo de incidencia.

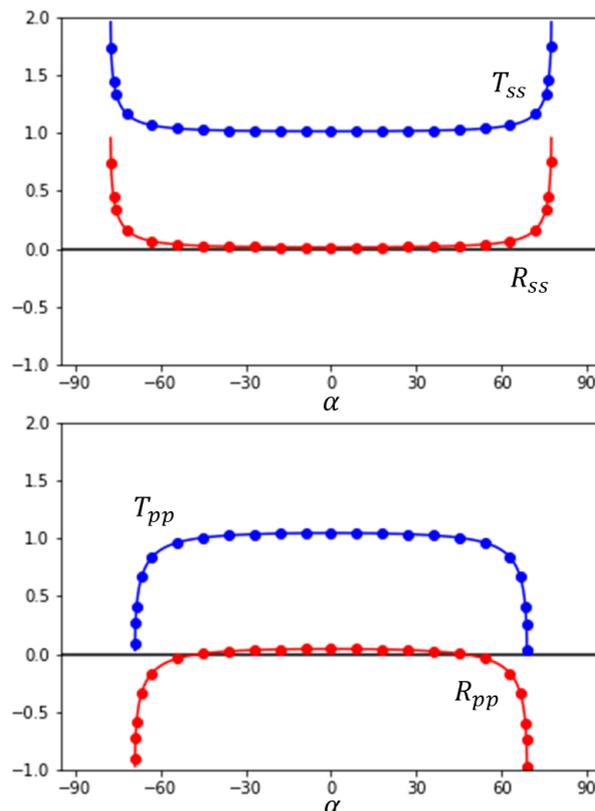


Fig. 5. Coeficientes de reflexión y transmisión para una interfaz vidrio denso-calcita con  $n = 1.7$ ,  $\delta = 0^\circ$  con  $\theta = 45^\circ$  en función del ángulo de incidencia.

reflexión total y que las ondas ordinaria y extraordinaria muestran el fenómeno en un ángulo distinto. El ángulo de reflexión total ordinario es  $\alpha_T^o \approx 60.94^\circ$  y el ángulo de reflexión total extraordinario es  $\alpha_T^e \approx 67.62^\circ$ . Ambos valores hallados coinciden con los resultados teóricos.

Si en cambio se incide desde un medio isótropo (aire) a calcita con el eje óptico a  $90^\circ$  del plano de incidencia, paralelo a la interfaz ( $\theta = 0^\circ$ ), la comparación de los coeficientes se muestran en la Figura 6)

En este plano principal también puede darse que haya reflexión total si el índice del medio isótropo es mayor a los índices principales del cristal (Figura 7). Si  $n = 1.7$  el ángulo de reflexión total extraordinaria es  $77.24^\circ$ , y el ángulo de reflexión total ordinaria es  $60.94^\circ$ . Ambos valores coinciden con los resultados teóricos.

Encontramos en todos los casos analizados que cuando se incide en uno de los planos principales, los coeficientes de transmisión  $T_{ss}$  y  $T_{pp}$  hallados de manera analítica coinciden con los resultados numéricos. Asimismo, se logró reproducir los ángulos críticos de reflexión total interna en interfaces isótropo-uniaxial en ambos planos principales (figs 5 y 7). De la coincidencia de las direcciones de las normales a los frente de ondas y rayos asociados y los coeficientes de reflexión y transmisión para interfaces isótropo-uniaxial para los planos principales y la obtención de los distintos ángulos críticos en interfaces isótropo-uniaxial podemos inferir que el programa funciona correctamente.

### V. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos realizado una descripción de la reflexión y transmisión de la luz a través de una interfaz medio

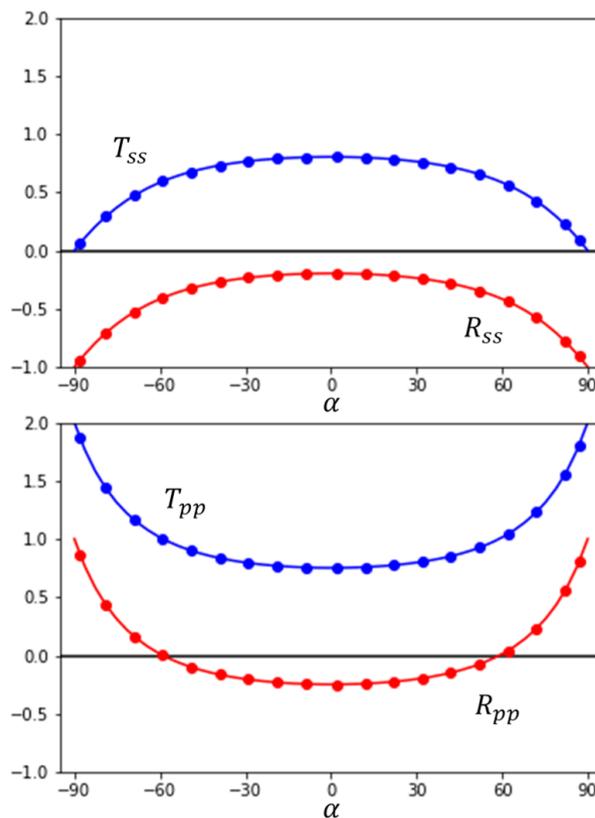


Fig. 6. Coeficientes de reflexión y transmisión para una interfaz aire-calcita con  $n = 1$ ,  $\delta = 90^\circ$  con  $\theta = 0^\circ$  en función del ángulo de incidencia.

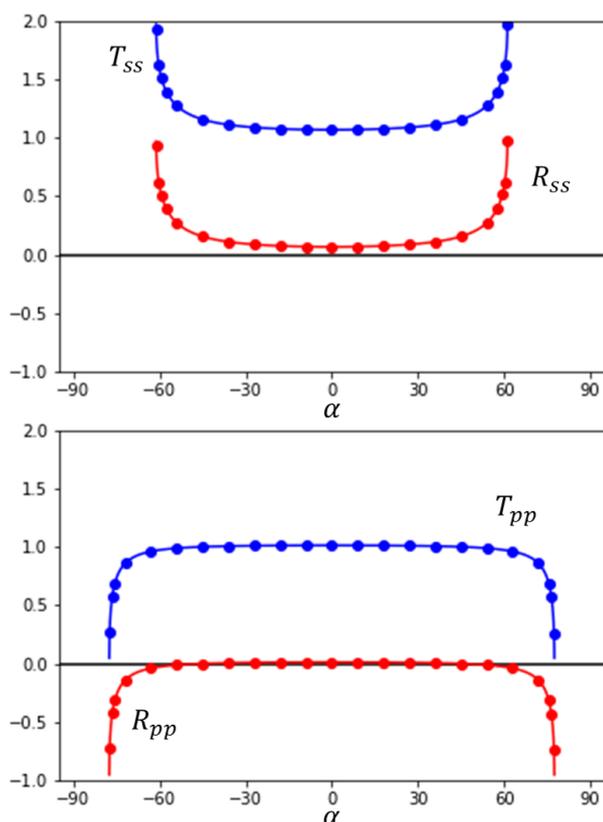


Fig. 7. Coeficientes de reflexión y transmisión para una interfaz vidrio denso-calcita con  $n = 1.7$ ,  $\delta = 90^\circ$  con  $\theta = 0^\circ$  en función del ángulo de incidencia. Se observa el fenómeno de reflexión total

isótropo-anisótropo uniaxial para distintas características del material isótropo y dirección de incidencia del haz respecto a la del eje óptico. Esta descripción está fundamentada en la resolución analítica de las Ecuaciones de Maxwell y obteniendo expresiones explícitas de los coeficientes de reflexión y transmisión para los casos en que el plano de incidencia coincide con uno de los planos principales del medio uniaxial.

Se comprobó que los valores obtenidos con el código desarrollado reproducen con precisión los resultados analíticos, observándose el fenómeno de refracción negativa, onda en retroceso y la coincidencia en la determinación de los ángulos de reflexión total.

Estos resultados sirven, además, como primeras pruebas de un software que se está desarrollando en nuestro grupo de investigación para determinar las características de las ondas incidentes reflejadas y transmitidas a través de un bloque de material uniaxial.

Se espera que el desarrollo completo de este software facilite la descripción del comportamiento de ondas electromagnéticas en medios uniaxiales brindando no solo las direcciones de propagación sino también todas las características de los campos asociados aún cuando se trate de haces limitados en el espacio y/o en el tiempo.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado con el apoyo parcial de los siguientes subsidios: 20020160100042BA- UBACYT 2017-2020, 20020170200232BA -UBACYT 2018-2019, PICT

2016 N° 2204. El Sr. Germán Caro (estudiante de la licenciatura en Ciencias Físicas de la FCEN-UBA) realizó este trabajo con el aporte de una Beca Estímulo 2017-2018 (UBA).

#### REFERENCIAS

- [1] J. Stamnes and V. Dhayalan, "Transmission of a two-dimensional gaussian beam into a uniaxial crystal." *Journal of the Optical Society of America A* Vol. 18, Issue 7, pp. 1662-1669, 2001.
- [2] R. Thompson, "Optical waves in layered media," *Journal of Modern Optics*, 37:1, 147-148, 2007.
- [3] K. Zhang and D. Li, *Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics*. Springer, 2008.
- [4] J. Canto, S. Matos, C. Paiva, and A. Barbosa, "Antennas and propagation society international symposium," *7AP-S 2008 IEEE (2008) 1-4.*, 2008.
- [5] A. Eroglu, *Wave Propagation and Radiation in Gyrotropic and Anisotropic Media*. Frontiers, Gif-sur-Yvette, 1992.
- [6] J. M. D. neiro, C. Alberdi, B. Hernández, and C. Sáenz, "Uniaxial absorbing media: conditions for refraction in the direction of the optical axis." *Journal of the Optical Society of America A* Vol. 30, Issue 3, pp. 385-391, 2013.
- [7] M. C. Simon and L. I. Perez, "Total reflection in uniaxial crystals," *Optik*, 1989.
- [8] J. Bliokh, Yu. P.; Felsteiner, "Total negative refraction in crystals for ballistic electrons and light," *arXiv:physics/0311066*, 2003.
- [9] Z. Liu, Z. Lin, and S. T. Chui, "Negative refraction and omnidirectional total transmission at a planar interface associated with a uniaxial medium," *Phys. Rev. B* 69, 115402, 2004.
- [10] Y. Zhang, B. Fluegel, and A. Mascarenhas, "Total negative refraction in real crystals for ballistic electrons and light," *Phys. Rev. Lett.* 91, 157404, 2003.
- [11] Y. Zhang and B. Fluegel, "Total negative refraction in real crystals for ballistic electrons and light," *Phys. Rev. Lett.*, 2004.
- [12] Z. Liu, Z. Lin, and S. Chui, "Negative refraction and omnidirectional total transmission at a planar interface associated with a uniaxial medium," *Phys. Rev. B*, 2004.
- [13] L. Perez, M. T. Garea, and R. Echarri, "Isotropic-uniaxial crystal interfaces: Negative refraction and backward wave phenomena," *Optics Communications*, vol. 254, no. 1-3, pp. 10-18, 2005.
- [14] Y. Bliokh and J. Felsteiner, "Total negative refraction in crystals for ballistic electrons and light," *arXiv: physics/0311066*, 2003.
- [15] M. Simon and L. Perez, "Evanescent waves in total reflection in uniaxial crystals," *Optik*, 1990.
- [16] M. C. Simon and R. M. Echarri, "Inhibited reflection in uniaxial crystals," *Optics Letters* Vol. 14, Issue 5, pp. 257-259 (1989), 1989.
- [17] M. C. Simon and R. Echarri, "Internal reflection in uniaxial crystals i. geometrical description," *J. Mod. Opt.*, 1990.
- [18] P. Belov, "Proceedings of the ursi/ieee xxvii convention on radio science," *Espoo, Finland*, 2002.
- [19] K. V. Gottschalk, M. Garea, M. C. Simon, and L. I. Perez, "Brewster's angle and the effective electric polarization," *Proceeding SPIE*, vol. 4419, pp. 454-457, 2001.
- [20] J. Lekner, "Brewster angles in reflection by uniaxial crystals," *Journal of the Optical Society of America A* Vol. 10, Issue 9, pp. 2059-2064, 1993.
- [21] M. C. Simon and R. M. Echarri, "Inhibited reflection in uniaxial crystals," *Opt. Lett.*, vol. 14, pp. 257-259, 1989.
- [22] J. C. Maxwell, "On physical lines of force," *Philosophical Magazine*, 1861.
- [23] —, "A dynamical theory of the electromagnetic field," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1865.
- [24] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*. 2.ed. Wiley, 1975.
- [25] M. B. . E. Wolf, *Principle of Optic: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, 7ma ed. Cambridge University Press, 1999.
- [26] M. C. Simon, "Ray tracing formulas for monoaxial optical componentes," *Applied Optics*, Vol. 22, N. 2, 1982, 1983.
- [27] M. C. Simon and R. M. Echarri, "Ray tracing formulas for monoaxial optical componentes: vectorial formulation," *Applied Optics*, Vol. 25 Pag. 1935-1939, 1986.
- [28] L. I. Perez and C. E. Vanney, "Non-absorbing isotropica uniaxial interfaces: refraction in ordinary and extraordinary total reflection," *Journal of Modern Optics*, vol. 52, no. 14, pp. 1981-2000, 2005.
- [29] M. C. Simon and K. V. Gottschalk, "Waves and rays in uniaxial birefringent crystals," *Optik*, Vol. 118, Issue 10, 2007.