

Nueva variante del algoritmo NLMS/F de bajo costo computacional

New variant of NLMS/F algorithm with low computational cost

Laura Jazmín Hidalgo Hernández^{#1}, Ángel Alfonso Vázquez Piña^{#2}, Xochitl Maya Rosales^{#3}, Juan Gerardo Avalos Ochoa^{#4}, Giovanni Sánchez Rivera^{#5}

[#] Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Instituto Politécnico Nacional
 Ciudad de México, México

¹ lhidalgoh1300@alumno.ipn.mx

² avazquezpl301@alumno.ipn.mx

³ xmayar1300@alumno.ipn.mx

⁴ javaloso@ipn.mx

⁵ gsanchezriv@ipn.mx

Recibido: 04/10/22; Aceptado: 01/12/22

Abstract— Adaptive filters are used in a wide variety of signal processing applications (e.g., acoustic echo cancellation, system identification, channel equalization, etc.). Adaptive algorithms are an essential part of adaptive filters since they update the filter coefficients to model the desired response. Therefore, adaptive algorithms must have low computational cost and high speed of convergence. In this paper, a new variant of the Normalized Least-Mean-Fourth (NLMF) algorithm based on set membership is presented, in addition, a method to automatically adjust the step size is presented. To evaluate its performance, the algorithm was simulated in system identification and acoustic echo cancellation applications. The results demonstrate that the proposed algorithm improves the convergence speed and exhibits low computational cost compared to the conventional NLMS/F algorithm.

Keywords: NLMF algorithm; NLMS/F algorithm; set membership; adaptive filtering.

Resumen—El filtrado adaptativo es utilizado ampliamente en aplicaciones de procesamiento de señales, entre las que se encuentran: cancelación de eco acústico, identificación de sistemas, ecualización de canales, entre otras. El elemento más importante de un filtro adaptativo es el algoritmo adaptativo, el cual tiene la función de ajustar los coeficientes del filtro para minimizar la señal de error. Por tal motivo, es necesario un algoritmo adaptativo que presente una baja carga computacional y una alta velocidad de convergencia. En este artículo, se presenta una nueva variante del algoritmo de mínimos promediados de cuarto orden normalizado (NLMF - Normalized Least-Mean-Fourth) basado en el conjunto de membresías, además, se propone un método que permite ajustar el factor de convergencia de forma automática. Para evaluar su funcionamiento, el algoritmo se simuló en un identificador de sistemas y un cancelador de eco acústico. Los resultados obtenidos demuestran que el algoritmo propuesto mejora la velocidad de convergencia, además de exhibir un bajo costo computacional en comparación con el algoritmo NLMS/F convencional.

Palabras clave: Algoritmo NLMF; algoritmo NLMS/F; conjunto de membresías; filtrado adaptativo.

I. INTRODUCCIÓN

El objetivo de un algoritmo adaptativo es ajustar los coeficientes de un filtro variante en el tiempo con el fin de minimizar un criterio previamente establecido. Uno de los algoritmos más conocidos es el algoritmo de mínimos cuadrados promediados normalizado (NLMS - Normalized Least-Mean-Square) debido a que su bajo costo computacional permite su implementación en una gran variedad de aplicaciones [1-4]. Asimismo, existen variantes que mejoran las propiedades de convergencia de dicho algoritmo, como el algoritmo de mínimos promediados de cuarto orden normalizado (NLMF - Normalized Least-Mean-Fourth). No obstante, su costo computacional e inestabilidad son mayores con respecto al algoritmo NLMS [5-7]. Por tal motivo, han surgido variantes como el algoritmo NLMS/F [8,9], el cual regula el comportamiento del algoritmo dependiendo de la señal de error y un parámetro previamente establecido.

En años recientes, diversos autores han propuesto métodos para reducir el costo computacional de los algoritmos adaptativos. Una de las técnicas más eficientes es la de conjunto de membresías (SM - Set-Membership) [10-12], en la cual los algoritmos actualizan los coeficientes del filtro si la señal de error es mayor a un umbral previamente establecido, por lo tanto, el número de operaciones se disminuye considerablemente una vez que la potencia del error se ha reducido.

En este trabajo se presenta una nueva variante del algoritmo NLMS/F basado en la técnica del conjunto de membresías. Adicionalmente, se propone un método que ajusta de forma dinámica un parámetro que permite regular el comportamiento del algoritmo, facilitando de esta forma su implementación en diversas aplicaciones. Los resultados obtenidos demuestran que el algoritmo propuesto reduce la carga computacional, además, de mejorar la velocidad de convergencia con respecto a su versión convencional.

II. COMBINACIÓN DE LOS ALGORITMOS NLMS Y NLMF

La expresión general del algoritmo NLMS para la actualización de los coeficientes del filtro está dada por:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\mu}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)+\rho} \mathbf{x}(n)e(n) \quad (1)$$

donde $\mathbf{w}(n+1)$ es el vector de coeficientes en el instante de tiempo $n+1$, μ es el factor de convergencia, $\mathbf{x}(n)$ es la señal de entrada al filtro, ρ es una constante pequeña usada para evitar la indeterminación y $e(n)$ es la señal de error, la cual se obtiene mediante:

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n) + \eta(n) \quad (2)$$

donde $d(n)$ es la señal deseada y $\eta(n)$ representa la señal de ruido aditivo. La función de costo del algoritmo NLMS se define como:

$$L_1(n) = \frac{1}{2}e^2(n) \quad (3)$$

Por otro lado, la actualización de los coeficientes del filtro y la función de costo del algoritmo NLMF se presenta en (4) y (5), respectivamente.

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\mu}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)+\rho} \mathbf{x}(n)e^3(n) \quad (4)$$

$$L_2(n) = \frac{1}{2}e^4(n) \quad (5)$$

Uniendo las funciones de costo de los algoritmos LMS y NLMF, se obtiene la siguiente función de costo:

$$L_3(n) = \frac{1}{2}e^2(n) - \frac{1}{2}\varepsilon \ln(e^2(n) + \varepsilon) \quad (6)$$

donde ε es un parámetro que permite conmutar entre ambos algoritmos, por lo tanto, regula la velocidad de convergencia y el rendimiento del algoritmo, al cual se le asigna un valor positivo $\varepsilon > 0$. De esta forma, la ecuación de actualización de coeficientes del algoritmo NLMS/F se expresa como:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\mu}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)+\rho} \mathbf{x}(n)\beta(n) \quad (7)$$

donde $\beta(n)$ es definida por:

$$\beta(n) = \frac{e^3(n)}{e^2(n)+\varepsilon} \quad (8)$$

Como se puede observar en (8), cuando $\varepsilon \gg e^2(n)$, el algoritmo NLMS/F se comporta como un algoritmo NLMF con un factor de convergencia de μ/ε , y cuando $\varepsilon \ll e^2(n)$, se comporta como un algoritmo NLMS con un factor de convergencia de μ . Por lo tanto, el valor de ε es crucial para determinar el comportamiento del algoritmo.

III. FILTRADO ADAPTATIVO POR CONJUNTO DE MEMBRESÍAS

La estrategia denominada conjunto de membresías establece una regla para la actualización de los coeficientes del filtro, en la cual se requiere que la magnitud de la señal del error sea menor o igual a un umbral preestablecido, $\bar{\gamma}$, de

modo que los coeficientes del filtro pertenezcan a un conjunto de soluciones factibles definidos mediante:

$$\Theta = \bigcap_{(x,d) \in S}^k \{\mathbf{w} \in \mathcal{R}^N : |d - \mathbf{w}^T \mathbf{x}| \leq \bar{\gamma}\} \quad (9)$$

donde S denota el conjunto de todos los posibles valores de \mathbf{x} y d . En algunas aplicaciones no es posible acceder a d , por lo que es necesario definir un conjunto de restricciones denominado $\mathcal{H}(n)$, el cual se expresa como:

$$\mathcal{H}(n) = \{\mathbf{w} \in \mathcal{R}^N : |d(n) - \mathbf{w}^T \mathbf{x}(n)| \leq \bar{\gamma}\} \quad (10)$$

Los límites de $\mathcal{H}(n)$, son considerados como un conjunto de hiperplanos paralelos $e(n) = \pm \bar{\gamma}$, donde la intersección entre el conjunto de restricciones y los hiperplanos es denominado conjunto de membresías $\psi(n)$.

$$\psi(n) = \bigcap_{i=0}^n \mathcal{H}(i) \quad (11)$$

Específicamente, si el conjunto $\psi(n)$ se encuentra en $\mathcal{H}(i)$, no se requiere calcular los coeficientes del vector \mathbf{w} , ya que estos se encuentran dentro del conjunto solución.

IV. ALGORITMO SM-NLMS/F

Para aplicar la teoría SM en el algoritmo NLMS/F, se sustituye la función de error, $\beta(n)$, en el cálculo del factor de convergencia del algoritmo SM-NLMS convencional [12], la cual se expresa como:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 - \frac{\bar{\gamma}}{|\beta(n)|} & \text{si } |\beta(n)| > \bar{\gamma} \\ 0 & \text{Caso contrario} \end{cases} \quad (12)$$

Al aplicar la regla descrita en (12), se reduce el costo computacional del algoritmo ya que cuando $|\beta(n)| < \bar{\gamma}$, el factor de convergencia es igual a cero, por lo tanto, no se requiere realizar la actualización de los coeficientes del filtro.

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} \beta^2(n) & \text{si } |\beta(n)| > \bar{\gamma} \\ \varepsilon(n-1) & \text{Caso contrario} \end{cases} \quad (13)$$

El valor $\bar{\gamma}$ se propone cercano a $\bar{\gamma} = \sqrt{5\sigma_\eta^2}$, donde σ_η^2 denota la varianza del ruido aditivo.

Por otra parte, cabe mencionar que el comportamiento de la señal $e^2(n)$ en las primeras iteraciones del algoritmo NLMS/F suele ser mayor a ε , debido a que a ε se le asigna un valor pequeño. Además, al establecer que $\varepsilon(n) = \beta^2(n)$ el valor de ε aumentará garantizando que $\varepsilon \gg e^2(n)$, por lo tanto, el algoritmo tendrá una tendencia a comportarse como un algoritmo NLMF y al aplicar la técnica de conjunto de membresías, el número de actualizaciones se reducirá considerablemente debido a que solo actualizará al algoritmo cuando $|\beta(n)|$ supere el umbral $\bar{\gamma}$.

V. RESULTADOS

Para demostrar el funcionamiento del algoritmo propuesto, se realizaron dos pruebas, en las cuales se comparó el funcionamiento del algoritmo propuesto y el algoritmo NLMS/F en una estructura de identificador de sistemas y cancelación de eco acústico.

A. Identificador de sistemas

En la Fig. 1 se muestra la estructura utilizada como identificador de sistemas, donde la señal de entrada es ruido blanco Gaussiano con varianza unitaria. El sistema desconocido es un filtro de respuesta finita al impulso (FIR - Finite Impulse Response) pasa bajas. Se realizaron tres pruebas diferentes para comprobar el funcionamiento de la propuesta, donde la señal deseada es afectada por un ruido Gaussiano aditivo con una relación señal a ruido (SNR - Signal to Noise Ratio) de 15dB, 20dB y 33dB. El filtro adaptativo y el sistema desconocido contaron con 16 coeficientes. Para el algoritmo NLMS/F se eligió $\mu = 0.4$ y $\epsilon = 0.000001$, dichos valores se obtuvieron a prueba y error, y se establecieron de tal forma que el algoritmo presentará la mayor velocidad de convergencia. Para evaluar el funcionamiento de los algoritmos se obtuvo el nivel de error cuadrático medio (MSE - Mean Square Error) al promediar 50 experimentos. Adicionalmente, durante el proceso de adaptación se realizó un cambio abrupto a la mitad de las iteraciones, al multiplicar los coeficientes del sistema desconocido por -1, esto con la finalidad de evaluar las capacidades de seguimiento del algoritmo.

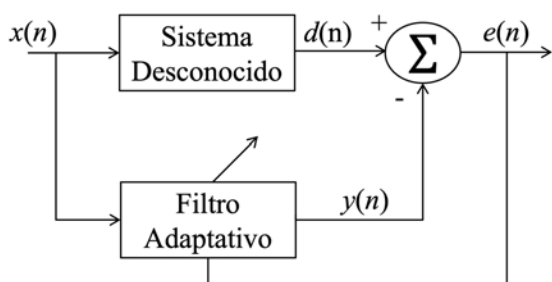


Fig. 1. Diagrama general de la estructura de un identificador de sistemas.

Como se muestra en la Fig. 2(a-c), el algoritmo propuesto presenta la mayor velocidad de convergencia tanto al inicio del experimento como al momento de realizar el cambio de coeficientes en el sistema desconocido. Además, el nivel de MSE es similar para ambos algoritmos. Sin embargo, al aplicar la técnica de conjunto de membresías el algoritmo propuesto no requiere de actualizar los coeficientes del filtro durante todo el proceso. Como se puede observar en la Tabla I, para este experimento el número de actualizaciones disminuye considerablemente mientras que el algoritmo NLMS/F requiere el cálculo de sus coeficientes durante todo el proceso.

TABLA I
PORCENTAJE DE ACTUALIZACIONES DEL ALGORITMO SM-NLMS/F UTILIZANDO COMO SEÑAL DE ENTRADA RUIDO BLANCO GAUSSIANO

Algoritmo	SNR (dB)	Actualizaciones (%)
SM-NLMS/F	15 dB	245 (12.25%)
	20 dB	293 (14.65%)
	33 dB	406 (20.30%)

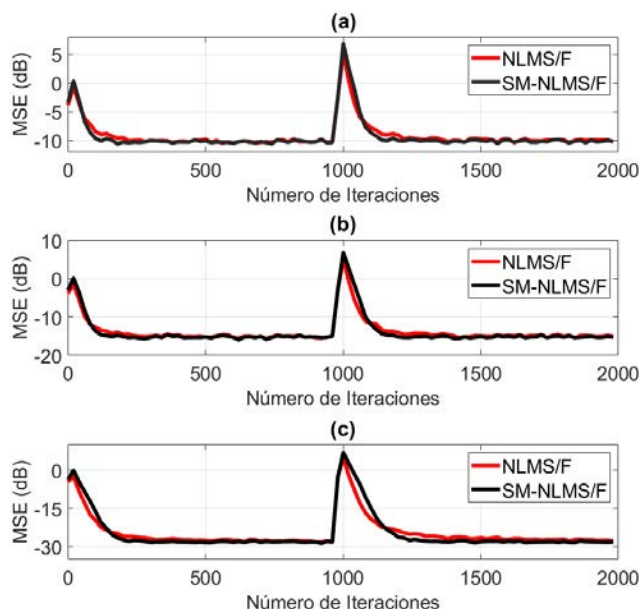


Fig. 2. Nivel de MSE de los algoritmos NMLS/F y SM-NLMS/F utilizando como señal de entrada ruido blanco Gaussiano y (a) SNR de 15dB, (b) SNR de 20dB, (c) SNR de 33dB.

Para el segundo experimento, se utilizó como señal de entrada el ruido de una turbina de avión. El sistema desconocido es un filtro FIR pasa bajas, en este caso tanto el filtro adaptativo como el desconocido contaron con 32 coeficientes. Para probar el rendimiento del algoritmo se realizaron tres pruebas donde a la salida del sistema desconocido se añadió ruido aditivo con una SNR de 15dB, 20dB y 33dB. Para el algoritmo NLMS/F se estableció $\mu = 0.5$ y $\epsilon = 0.00005$, ya que estos valores entregaron el mejor desempeño del algoritmo. Las curvas de aprendizaje se obtuvieron al promediar 200 experimentos, de igual forma que en el primer experimento se realizó un cambio abrupto a la mitad de las iteraciones para probar las capacidades de seguimiento del algoritmo.

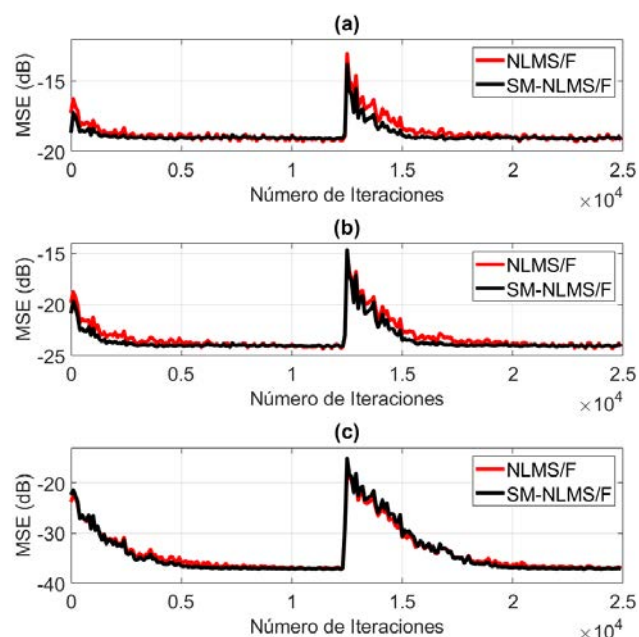


Fig. 3. Nivel de MSE de los algoritmos NMLS/F y SM-NLMS/F utilizando como señal de entrada el ruido de una turbina de avión y (a) SNR de 15dB, (b) SNR de 20dB, (c) SNR de 33dB.

Como se muestra en la Fig. 3(a-c), la velocidad de convergencia y el nivel de MSE de ambos algoritmos es muy similar. No obstante, como se observa en la Tabla II, el algoritmo propuesto disminuye ampliamente el número de actualizaciones, a pesar de los diferentes niveles de SNR.

TABLA II
PORCENTAJE DE ACTUALIZACIONES DEL ALGORITMO SM-NLMS/F UTILIZANDO COMO SEÑAL DE ENTRADA EL RUIDO DE UNA TURBINA DE AVIÓN

Algoritmo	SNR (dB)	Actualizaciones (%)
SM-NLMS/F	15 dB	3,343 (13.37%)
	20 dB	3,656 (14.62%)
	33 dB	5,666 (22.66%)

B. Cancelador de eco acústico

Para esta prueba se simuló un sistema de cancelación de eco acústico, la estructura de dicho sistema se muestra en la Fig. 4. Para modelar la trayectoria de eco de una habitación se utilizó la función de transferencia obtenida de [13], la cual fue modelada con un filtro FIR de 1024 coeficientes. Se utilizó como señal de extremo lejano una grabación de voz muestreada a 8kHz con una duración de 9.25 segundos. La señal deseada es la suma del ruido de fondo, $\eta(n)$, y la señal de eco, $y(n)$. Donde $\eta(n)$ se estableció como una señal independiente de ruido blanco Gaussiano con una SNR de 20 dB. El rendimiento de los algoritmos NLMS/F y SM-NLMS/F se evaluó en términos de la mejora de pérdida de retorno del eco (ERLE- Echo Return Loss Enhancement). El algoritmo NLMS/F se ajustó con los siguientes parámetros: $\mu = 0.6$ y $\epsilon = 0.0001$.

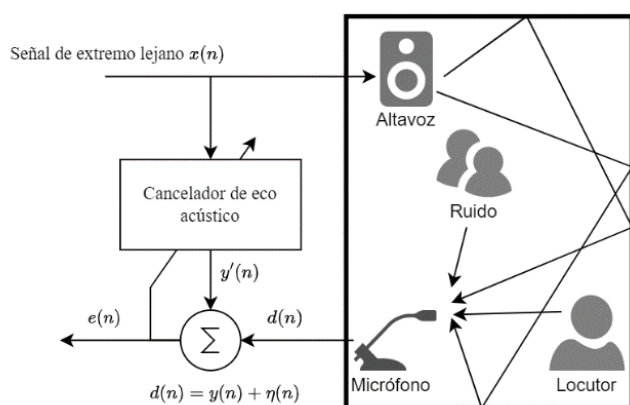


Fig. 4. Estructura general de un sistema cancelador de eco acústico.

En la Fig. 5 se muestran los resultados del experimento, como se puede observar ambos algoritmos tienen un rendimiento similar, a pesar de ello el algoritmo propuesto actualiza sus coeficientes únicamente en 28,378 iteraciones, es decir, reduce en un 61% el computo de sus coeficientes, mientras que el algoritmo NLMS/F realiza el 100% de las actualizaciones.

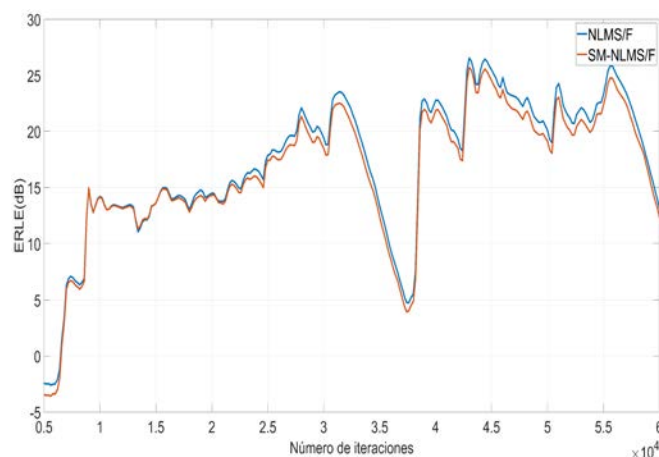


Fig. 5. Nivel de ERLE de los algoritmos NLMS/F y SM-NLMS/F utilizando una grabación de voz como señal de entrada.

TABLA III
NÚMERO DE OPERACIONES POR ITERACIÓN

Algoritmo	Multiplicaciones	Sumas
NLMS/F	3N+4	3N+1
SM-NLMS/F	3N+4	3N+2

En la Tabla 1 se muestra el número de operaciones requeridas por los algoritmos NLMS/F y SM-NLMS/F, donde N representa la longitud del filtro adaptativo. Como se puede observar el algoritmo NLMS/F requiere 3N+4 multiplicaciones y 3N+1 sumas, mientras que el algoritmo propuesto precisa de 3N+4 multiplicaciones y 3N+2 sumas. Cabe mencionar que el algoritmo propuesto no requiere el cálculo de sus coeficientes durante todo el proceso, por lo que el costo computacional se reduce al aplicar la técnica del conjunto de membresías.

VI. CONCLUSIONES

En este artículo se presentó una variante del algoritmo adaptativo NLMS/F basado en el conjunto de membresías. Adicionalmente, se propuso un método para establecer de manera automática el factor de convergencia del algoritmo. Los resultados experimentales demuestran que el algoritmo propuesto alcanza una mayor velocidad de convergencia y un nivel de MSE similar con respecto al algoritmo NLMS/F. Además, el número de multiplicaciones y sumas realizadas al ejecutar el algoritmo propuesto se reducen significativamente, debido a que no se requiere calcular los coeficientes del filtro durante todo el proceso adaptativo, por lo que lo convierte en una gran opción para el desarrollo de sistemas prácticos.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y al Instituto Politécnico Nacional (IPN) por el apoyo financiero para la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] S. S. Haykin, Adaptive filter theory, Fifth edition, International edition. Upper Saddle River Boston Columbus San Francisco New York: Pearson, 2014.
- [2] S. Li, S. Wu, Y. Wang, W. Guo, y Y. Zhou, "An improved NLMS algorithm based on speech enhancement", en 2015 IEEE Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference (IAEAC), Chongqing, China, dic. 2015, pp. 896-899. doi: 10.1109/IAEAC.2015.7428686.

- [3] F. Wang, Q. Wang, F. Liu, J. Chen, L. Fu, y F. Zhao, "Improved NLMS-based adaptive denoising method for ECG signals", *THC*, vol. 29, n.º 2, pp. 305-316, mar. 2021, doi: 10.3233/THC-202659.
- [4] J. Benesty, C. Paleologu, S. Ciochina, E. V. Kuhn, K. J. Bakri, y R. Seara, "LMS and NLMS Algorithms for the Identification of Impulse Responses with Intrinsic Symmetric or Antisymmetric Properties", en *ICASSP 2022 - 2022 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Singapore, Singapore, may 2022, pp. 5662-5666. doi: 10.1109/ICASSP43922.2022.9747430.
- [5] A. Zerguine, "Convergence and steady-state analysis of the normalized least mean fourth algorithm", *Digital Signal Processing*, vol. 17, n.º 1, pp. 17-31, ene. 2007, doi: 10.1016/j.dsp.2006.01.005.
- [6] E. Eweda y N. J. Bershad, "Stochastic Analysis of a Stable Normalized Least Mean Fourth Algorithm for Adaptive Noise Canceling With a White Gaussian Reference", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 60, n.º 12, pp. 6235-6244, dic. 2012, doi: 10.1109/TSP.2012.2215607.
- [7] A. Zerguine, "Convergence behavior of the normalized least mean fourth algorithm", en *Conference Record of the Thirty-Fourth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers (Cat. No.00CH37154)*, Pacific Grove, CA, USA, 2000, vol. 1, pp. 275-278. doi: 10.1109/ACSSC.2000.910958.
- [8] B. Mohanty, H. K. Sahoo, y B. Patnaik, "Block NLMS/F-based equalizer design and channel capacity analysis for indoor IEEE 802.11 fading wireless channels", *SIViP*, vol. 13, n.º 4, pp. 693-701, jun. 2019, doi: 10.1007/s11760-018-1398-2.
- [9] B. Mohanty, H. K. Sahoo, y B. Patnaik, "NLMS/F Based Adaptive Beam former for Indoor Wireless Channel", en *2017 Ninth International Conference on Advanced Computing (ICoAC)*, Chennai, dic. 2017, pp. 87-91. doi: 10.1109/ICoAC.2017.8441186.
- [10] P. S. R. Diniz, "Set-Membership Adaptive Filtering", en *Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation*, P. S. R. Diniz, Ed. Cham: Springer International Publishing, 2020, pp. 189-229. doi: 10.1007/978-3-030-29057-3_6.
- [11] I. Hassani, M. Arezki, y A. Benallal, "A novel set membership fast NLMS algorithm for acoustic echo cancellation", *Applied Acoustics*, vol. 163, p. 107210, jun. 2020, doi: 10.1016/j.apacoust.2020.107210.
- [12] S. Gollamudi, S. Nagaraj, S. Kapoor and Yih-Fang Huang, "Set-membership filtering and a set-membership normalized LMS algorithm with an adaptive step size," in *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 5, no. 5, pp. 111-114, May 1998, doi: 10.1109/97.668945.
- [13] C. Paleologu, S. Ciochina and J. Benesty, "Variable Step-Size NLMS Algorithm for Under-Modeling Acoustic Echo Cancellation," in *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 15, pp. 5-8, 2008, doi: 10.1109/LSP.2007.910276.