

# Estructura alternante para sistemas de beamforming adaptativo basada en los algoritmos APL/SR-LMS

Alternating Adaptive Beamforming System Based on the APL/SR-LMS Algorithms

Jesús Roberto del Ángel Ruíz<sup>#1</sup>, Xochitl Maya Rosales<sup>#2</sup>, Juan Gerardo Avalos Ochoa<sup>#3</sup>,  
 Carlos Alfonso Trejo Villanueva<sup>#4</sup>, Giovanny Sánchez Rivera<sup>#5</sup>

<sup>#</sup> Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Instituto Politécnico Nacional  
 Ciudad de México, México

<sup>1</sup> jdelangelr1900@alumno.ipn.mx

<sup>2</sup> xmayar1300@alumno.ipn.mx

<sup>3</sup> javaloso@ipn.mx

<sup>4</sup> carlostrejo@tесе.edu.mx

<sup>5</sup> gsanchezriv@ipn.mx

Recibido: 21/02/22; Aceptado: 06/05/22

**Abstract**— Beamforming is a wireless communication technique used in telecommunications applications, which is used to separate a desired signal from interfering signals. This technique increases the coverage range and reduces the interference problem, improving the performance of the systems. To achieve this operation, adaptive algorithms are required. In this work, an alternating structure for beamforming systems is presented, which is composed of two algorithms, the Sign Regressor Least Mean Square (SR-LMS) and the Affine Projection Like (APL) algorithm. The results show that the proposed structure has the best characteristics of the combined algorithms, obtaining an algorithm with a high convergence speed and lower computational cost compared to other algorithms based on conventional convex combinations.

**Keywords:** Beamforming; adaptive filtering; adaptive algorithms; convex combination.

**Resumen**— El Beamforming es una técnica de comunicación inalámbrica utilizada en aplicaciones de telecomunicaciones, la cual se usa para separar una señal deseada de señales interferentes. Esta técnica aumenta el rango de cobertura y reduce el problema de interferencia, mejorando el rendimiento de los sistemas. Para lograr dicho funcionamiento se requiere de algoritmos adaptativos. En este trabajo, se presenta una estructura alternante para sistemas beamforming, la cual está compuesta por dos algoritmos adaptativos, el Sign Regressor Least Mean Square (SR-LMS) y el algoritmo Affine Projection Like (APL). Los resultados demuestran que la estructura propuesta tiene las mejores características de los algoritmos combinados, obteniendo un algoritmo con una alta velocidad de convergencia y menor costo computacional en comparación con otros algoritmos basados en combinaciones convexas convencionales.

**Palabras clave:** Beamforming; filtrado adaptativo; algoritmos adaptativos; combinación convexa.

## I. INTRODUCCIÓN

El beamforming es una técnica utilizada para mitigar los problemas de interferencia y mejorar la transmisión de datos. Esta técnica de procesamiento tiene como objetivo distinguir

propiedades espaciales de una señal deseada y separarla de señales contaminantes, lo cual se realiza mediante la modificación en amplitud y fase de las señales recibidas o transmitidas, logrando así un patrón de radiación deseado [1]. Para realizar el ajuste de amplitud y fase se utiliza un algoritmo adaptativo. La elección adecuada de dicho algoritmo es importante, debido a que los algoritmos adaptativos de alta complejidad computacional solamente pueden ser implementados en hardware de grandes prestaciones, lo cual incrementa los costos de su implementación, por otra parte, al usar un algoritmo de baja complejidad, es posible que no se pueda realizar implementaciones debido a la baja velocidad de convergencia del algoritmo. Debido a que existe una gran variedad de algoritmos adaptativos, resulta difícil su correcta elección, ya que hay algoritmos con baja complejidad computacional como el algoritmo de mínimos cuadrados promediados (LMS – Least Mean Square) [2], sin embargo, presenta una velocidad de convergencia lenta. Por otro lado, existen algoritmos de alta velocidad de convergencia como el algoritmo de proyecciones afines (AP - Affine Projection) [3], no obstante, presentan un nivel alto de error cuadrático medio (MSE – Mean Square Error) y además su complejidad computacional es muy elevada.

Recientemente, se ha desarrollado un método que tiene como objetivo aprovechar las mejores características de dos algoritmos diferentes, el cual es llamado combinación convexa [4]. Esta técnica se ha utilizado en diversas aplicaciones de filtrado adaptativo, por ejemplo, en [5] son usados en sistemas de cancelación de eco acústico y en [6] se presentó una combinación de los algoritmos AP y LMS aplicada a sistemas de control activo de ruido. Por otra parte, en [7] se utilizó por primera vez en sistemas de beamforming, en donde se combina el algoritmo LMS y el algoritmo RLS (Recursive Least Squares), mientras que en [8] se realizó la combinación de los algoritmos AP y LMS. Sin embargo, esta técnica presenta un costo computacional muy elevado, debido a que los dos algoritmos que integran la combinación siempre están trabajando. Además, se han presentado estructuras

denominadas alternantes [9], las cuales reducen el cómputo con respecto a las combinaciones convexas, sin embargo, solo se han utilizado para aplicaciones de control activo de ruido.

Este trabajo presenta una estructura alternante adaptativa aplicada a sistemas de beamforming. La estructura está compuesta por los algoritmos APL y SR-LMS, con la finalidad de explotar las mejores características de cada uno, en el caso del algoritmo APL su alta velocidad de convergencia y del algoritmo SR-LMS su nivel de MSE. Los resultados demuestran que la estructura propuesta permite alcanzar una alta velocidad de convergencia con un bajo costo computacional.

## II. CONFORMADOR DE HACES (BEAMFORMING)

Beamforming es una técnica de filtrado espacial, la cual representa una solución a los problemas de interferencia de señales por patrones omnidireccionales. Esta técnica tiene como principal objetivo distinguir ciertas propiedades espaciales de una señal en específico, que es reconocida como la señal deseada y separarla del resto de las señales que son conocidas como contaminantes o interferentes. El beamforming sustituye los arreglos convencionales de antenas utilizados para llevar a cabo la transmisión inalámbrica, por arreglos de antenas inteligentes, que logran generar automáticamente patrones de radiación nuevos, según la necesidad del sistema.

Las antenas inteligentes también conocidas como antenas adaptativas son hoy en día, una tecnología prometedora debido a que crean sistemas de comunicación inalámbrica con mayor capacidad y calidad de enlace a través de reutilización de frecuencia y co-canal, combinando las señales de los elementos para formar un patrón de haz movable que sigue a la señal o usuario deseado, logrando que el patrón de radiación se modifique durante el proceso, de forma tal que el lóbulo con mayor potencia, se encuentre dirigido al usuario deseado, en tanto existan nulas o bajas intensidades de recepción y radiación. Este proceso de combinar señales y luego dirigir las en una dirección en específico es comúnmente conocido como beamforming.

En la actualidad, se han desarrollado sistemas de beamforming que son capaces de adaptarse de manera automática. Su función principal es la de estimar haces o lóbulos según sea la necesidad. A través de esta técnica el lóbulo o haz principal del patrón de radiación envuelve a la señal deseada, en tanto las otras señales de interferencia o no deseadas son discriminadas, esto quiere decir que en la dirección de ellas, no se observara ningún haz de radiación y por ende no podrán ser captadas. La Fig. 1 muestra la estructura general de un beamforming adaptativo.

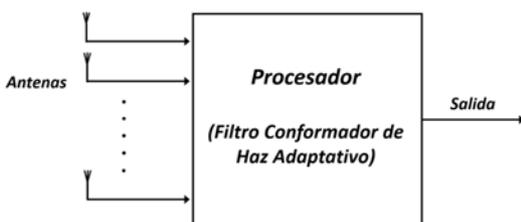


Fig. 1. Diagrama general de la estructura de beamforming adaptativo.

Las técnicas digitales como el filtraje adaptativo para la conformación de haces o lóbulos ofrecen diversos beneficios, entre los que se encuentran la flexibilidad, confiabilidad y repetitividad de la señal deseada. Además, al hacer uso del beamforming digital se obtienen otras ventajas como:

- La dirección y la forma del lóbulo pueden ser cambiadas rápidamente.
- Se logra la creación de varios lóbulos o haces a partir de un solo arreglo inteligente de antenas, sin que se vean afectadas las limitaciones de ortogonalidad de las señales.
- Los errores de amplitud, así como los de fase, pueden ser caracterizados en cada canal receptor, logrando un control de amplitud y de fase muy exacto en las señales y a su vez en la precisión y en la forma del patrón de radiación.

El funcionamiento de los sistemas de beamforming adaptativos depende en gran medida del algoritmo adaptativo utilizado. En este trabajo se presenta un método que hace uso del algoritmo Sign Regressor Least Mean Square (SR - LMS) y el algoritmo affine projection like (APL).

El algoritmo SR-LMS, es una variante del algoritmo LMS que presenta una complejidad computacional menor a cambio de una velocidad de convergencia lenta. La ecuación del algoritmo para la actualización de los coeficientes del filtro se presenta en (1).

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \text{sign}[\mathbf{x}(n)] e(n) \quad (1)$$

donde  $\mathbf{w}(n+1)$  es el peso siguiente del filtro,  $\mathbf{w}(n)$  representa el peso del coeficiente actual,  $\mu$  es el factor de convergencia,  $\mathbf{x}(n)$  es la señal de entrada al filtro y  $e(n)$  es la señal de error, la cual se obtiene mediante (2):

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (2)$$

Siendo  $d(n)$  la señal deseada y  $y(n)$  la salida del filtro, la cual está dada por (3):

$$y(n) = \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w}(n) \quad (3)$$

Por otra parte, la función de signo se calcula mediante (4):

$$\text{Sign } \mathbf{x}(n) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x}(n) > 0 \\ 0, & \mathbf{x}(n) = 0 \\ -1, & \mathbf{x}(n) < 0 \end{cases} \quad (4)$$

El algoritmo APL es una modificación que presenta una complejidad computacional menor que su versión original, debido a que no requiere la operación de inversión de matriz. La ecuación de actualización de coeficientes del algoritmo APL está dada por (5):

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \mathbf{X}(n) \mathbf{e}(n) \quad (5)$$

donde  $\mathbf{w}(n)$  es el peso de los coeficientes del filtro,  $\mathbf{e}(n)$  la señal de error,  $\mathbf{X}(n)$  la matriz de la señal de entrada y el factor de convergencia se obtiene mediante (6):

$$\mu = \frac{\|\mathbf{X}(n)\mathbf{e}(n)\|^2}{\|\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)\mathbf{e}(n)\|^2} \quad (6)$$

III. MÉTODO PROPUESTO

En el presente trabajo de investigación se propone el uso de un algoritmo alternante que combina los algoritmos APL y SR-LMS, con la finalidad de mantener una velocidad de convergencia alta similar al del algoritmo APL y un costo computacional bajo y mejor nivel de MSE similar al del algoritmo SR-LMS. En la Fig. 2 se muestra el diagrama general de la estructura alternante propuesta para un sistema beamforming.

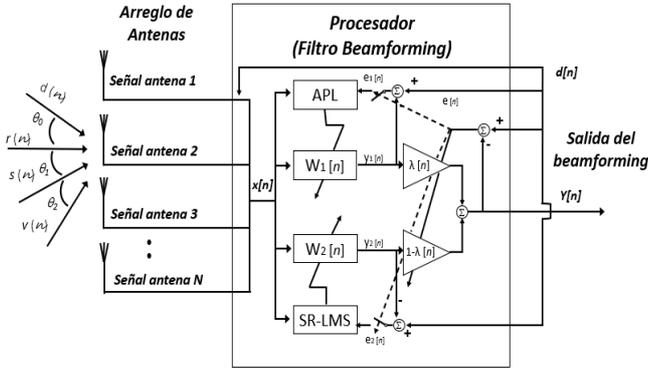


Fig. 2. Diagrama general de la estructura alternante propuesta para un sistema de beamforming adaptativo.

Como se puede observar en la Fig. 1, la principal ventaja de la estructura propuesta se presenta en el mecanismo de selección de los algoritmos, el cual se encarga de actualizar solamente uno de los algoritmos en cada iteración. La estructura alternante propuesta clasifica la adaptación en dos modos:

- 1) Un modo de seguimiento, el cual es el periodo en el que el algoritmo adaptativo logra converger rápidamente
- 2) Un modo de estado estacionario, donde se alcanza un MSE estable.

Para determinar los modos se compara el error de salida con el MSE teórico en estado estacionario del algoritmo APL mediante

$$\delta = \frac{2L}{2L-1} \sigma_v^2 \quad (7)$$

Donde  $\delta$  denota el umbral que representa el valor teórico del MSE para el algoritmo APL,  $L$  el número de reusos utilizados en el algoritmo antes mencionado y  $\sigma_v^2$  es la varianza de la señal de ruido.

La señal de salida  $y(n)$  del algoritmo propuesto se calcula mediante (8), la cual es una combinación de las salidas de cada uno de los algoritmos que componen esta estructura.

$$y(n) = \lambda(n)y_1(n) + [1 - \lambda(n)]y_2(n) \quad (8)$$

Donde  $\lambda(n)$  es actualizada mediante (9):

$$\lambda(n) = \frac{1}{1 + e^{-a(n)}} \quad (9)$$

Siendo  $a(n)$  un parámetro auxiliar utilizado para minimizar el error cuadrado instantáneo de los filtros y se calcula de la forma  $a(n) = a(n-1) + \mu_a e(n)[e_2(n) - e_1(n)]\lambda(n)[1 - \lambda(n)] + \rho[a(n) - a(n-1)]$  donde  $\rho$  se define como una

constante positiva y  $\mu_a$  representa el factor de convergencia para  $a(n)$ .

Para asegurar un buen rendimiento de la combinación se transfiere una parte de  $w_1$  a  $w_2$ . Esta transferencia de pesos solo se aplica cuando el algoritmo rápido tiene mejor nivel de MSE que el algoritmo lento. Por lo tanto, la regla de adaptación es modificada para  $w_2$  y se obtiene como (10):

$$w_2(n) = \alpha w_2(n) + (1 - \alpha)w_1(n-1) \quad (10)$$

Para  $\lambda(n) > t$ , donde  $\alpha$  y  $t$  son parámetros cercanos a 1. Finalmente, la regla que establece el funcionamiento de los algoritmos APL y SR-LMS se presenta en (11) y (12), respectivamente:

$$w_1(n+1) = \begin{cases} w_1(n) + \mu_1(n)X(n)e_1(n), & \text{si } e^2(n) \geq \delta \\ w_1(n), & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (11)$$

$$w_2(n+1) = \begin{cases} w_2(n), & \text{si } e^2(n) \geq \delta \\ w_2(n) + \mu_2 e_2(n)\text{sign}[x(n)], & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (12)$$

Por lo tanto, la señal de error  $e(n)$  se calcula de la forma (13):

$$e(n) = \lambda(n) e_1(n) + (1 - \lambda(n)) e_2(n) \quad (13)$$

En la Tabla I se resume el procedimiento del algoritmo alternante propuesto.

TABLA I  
ALGORITMO ALTERNANTE APL/SR-LMS

<p>Entrada <math>\mu_2, \mu_a, L</math> Inicialización <math>w_1 = w_2 = 0; \mu_1 = 0; \alpha = 0; \lambda = 0;</math> for n</p> <p><math>y_1(n) = X^T w_1(n)</math> <math>e_1(n) = d(n) - y_1(n)</math> <math>y_2(n) = w_2^T(n)X(n)</math> <math>e_2(n) = d(n) - y_2(n)</math> <math>\lambda(n) = \frac{1}{1 + e^{-a(n)}}</math> <math>y(n) = \lambda(n)y_1(n) + [1 - \lambda(n)]y_2(n)</math> <math>e(n) = \lambda(n)e_1(n) + (1 - \lambda(n))e_2(n)</math> <math>a(n) = a(n-1) + \mu_a e(n)[e_2(n) - e_1(n)]\lambda(n)[1 - \lambda(n)] + \rho[a(n) - a(n-1)]</math> <math>\delta = \frac{2L}{2L-1} \sigma_v^2</math> if <math>e^2(n) \geq \delta</math> <math>\mu_1(n) = \frac{\ X(n)e_1(n)\ ^2}{\ X^T(n)X(n)e_1(n)\ ^2}</math> <math>w_1(n+1) = w_1(n) + \mu_1(n)X(n)e_1(n)</math> <math>w_2(n+1) = w_2(n)</math> else <math>w_1(n+1) = w_1(n)</math> <math>w_2(n+1) = w_2(n) + \mu_2 e_2(n)\text{sign}[x(n)]</math> endif <math>w_2(n) = \alpha w_2(n) + (1 - \alpha)w_1(n-1)</math> endfor</p>
--

IV. RESULTADOS

Con la finalidad de mostrar el funcionamiento de la estructura propuesta, se simuló un sistema beamforming en el software MATLAB™, en donde se llevó a cabo una comparación entre los algoritmos APL, SR-LMS, un algoritmo convexo y el algoritmo alternante propuesto. Las señales recibidas por el arreglo de antenas fueron sumas de cosenos de la forma:

$$i(n) = s(n) + v(n) \quad (14)$$

Donde el primer término  $d(n) = A(n) \cos(n\omega_0 + \phi_a)$  representa la señal deseada y el término  $v(n) = B(n) \cos(n\omega_0 + \phi_b - \phi_0)$  representa una señal de interferencia que arriba con un ángulo  $\theta_0$  relativo a la señal  $s(n)$ . Cabe mencionar, que A y B son la amplitud,  $n$  el número de muestras,  $\omega_0$  la frecuencia angular,  $\phi_a$  y  $\phi_b$  la fase de las señales y  $\phi_0$  un cambio de fase usado para mostrar la diferencia que existe en el tiempo de llegada entre las señales, la cual se obtiene mediante:

$$\phi_0 = \pi \sin \theta_0 \tag{15}$$

Como se puede observar,  $\phi_0$  depende del ángulo de llegada de la señal de interferencia.

En los experimentos realizados, se utilizó valores aleatorios para la fase  $\phi_a$  y  $\phi_b$ , la señal de interferencia tuvo un ángulo de  $\theta_0 = 45^\circ$  mientras que la señal deseada  $\theta = 0$ . Además, como ruido aditivo se agregó un ruido blanco Gaussiano con relación señal a ruido de 30 dB. Los resultados se obtuvieron al obtener la media de un total de 500 experimentos para cada una de las simulaciones de seis y ocho antenas.

Para el algoritmo alternante APL del algoritmo convexo se estableció el número de reúsos en 8 y el factor de convergencia para el algoritmo SR-LMS fue de 0.015. Dichos valores fueron elegidos debido a que en la experimentación los algoritmos presentaron su mejor rendimiento.

En las Fig. 3 y 4 se muestran las gráficas de los patrones de radiación obtenidos en las simulaciones. Los resultados demuestran que los algoritmos simulados funcionan de manera correcta al presentar un patrón que solamente recibe la señal deseada y discrimina todas las señales que están fuera del rango.

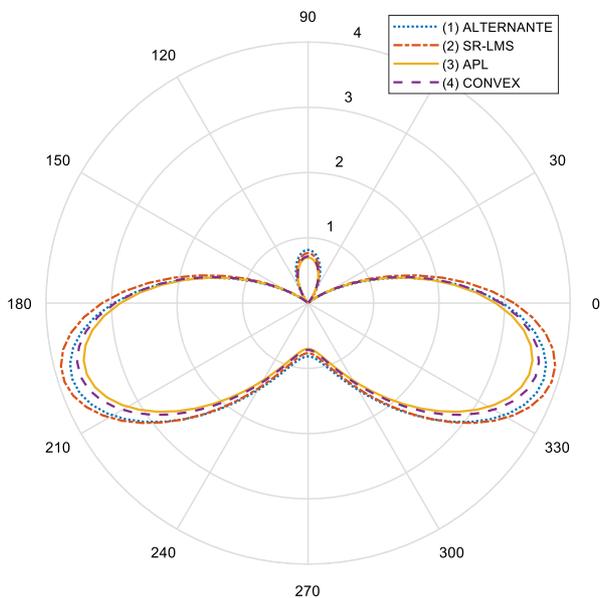


Fig. 3. Patrón de radiación del sistema de beamforming con seis antenas.

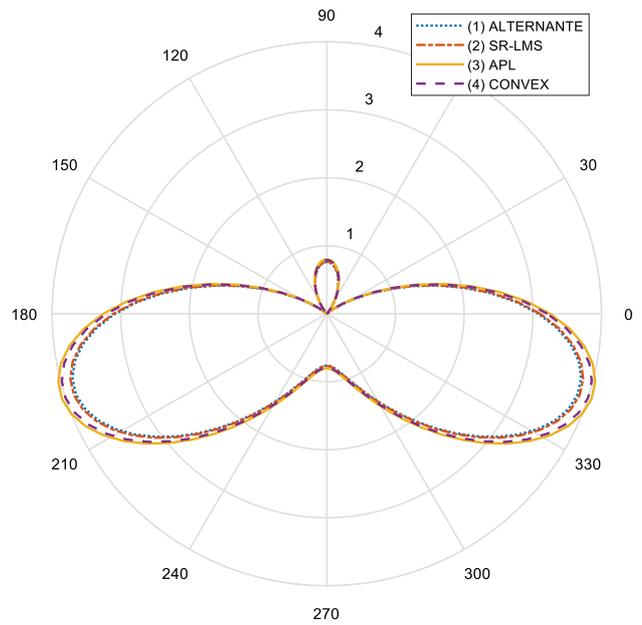


Fig. 4. Patrón de radiación del sistema de beamforming con ocho antenas.

Los resultados de las gráficas de los patrones de radiación obtenidos en las simulaciones de las Fig. 3 y 4, demuestran que todos los algoritmos simulados trabajan de la forma esperada al presentar un patrón que solamente recibe la señal deseada con una fase de  $180^\circ$  y discrimina al resto de las señales que están fuera de esta, que son las señales contaminantes establecidas en ángulos de fase de  $90^\circ$ .

En las Fig. 5 y 6 se presenta el nivel de error cuadrático medio (MSE) obtenido para las simulaciones con seis y ocho antenas, donde se aprecia que el algoritmo alternante presenta una velocidad similar a la del algoritmo APL y a la del algoritmo convexo, sin embargo, su nivel de MSE es ligeramente mayor que estos.

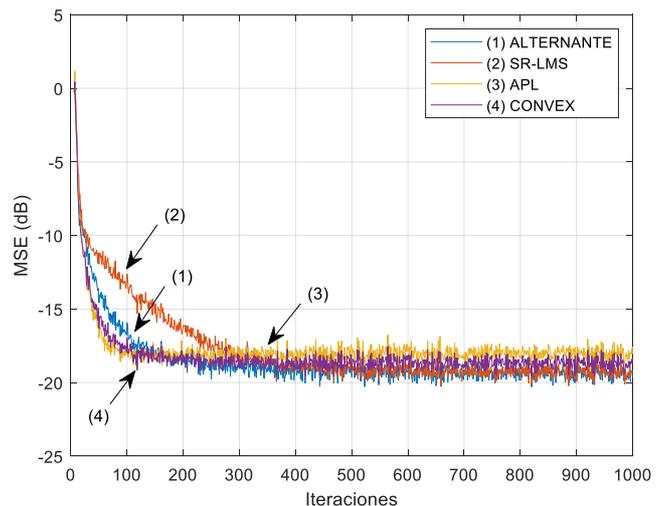


Fig. 5. Nivel de MSE del sistema de beamforming con seis antenas.

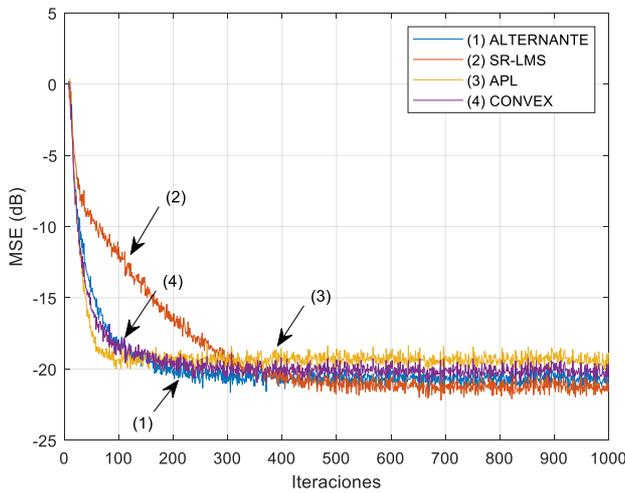


Fig. 6. Nivel de MSE del sistema de beamforming con ocho antenas.

### V. DISCUSIÓN

Los resultados obtenidos en las simulaciones demuestran que el algoritmo propuesto alcanza una velocidad de convergencia y nivel de MSE similar a la versión convexa. Sin embargo, la principal ventaja que tiene el método propuesto se centra en el costo computacional.

En principio, en la Tabla II se hace una comparación con el número de actualizaciones de coeficientes del filtro adaptativo realizadas por el algoritmo convexo y el propuesto por esta investigación. En este caso, se menciona que el algoritmo convexo realiza en todo momento actualizaciones de coeficientes y por tanto su costo computacional es fijo. Respecto a los dos algoritmos utilizados en la propuesta, tanto el algoritmo APL, así como el SR-LMS, están siempre trabajando y actualizando sus pesos, sin embargo, el algoritmo alternante solo actualiza los coeficientes de uno de los dos algoritmos que lo componen, logrando una significativa reducción del costo computacional.

TABLA III

TABLA COMPARATIVA DE OPERACIONES DE ACTUALIZACIÓN DE COEFICIENTES ENTRE EL FILTRO CONVEXO Y EL ALTERNANTE CON 6 Y 8 ANTENAS.

Número de antenas	Algoritmo	Porcentaje de actualizaciones
6	CONVEXO	100%
6	ALTERNANTE/APL	45.8%
	ALTERNANTE/SR-LMS	54.2%
8	CONVEXO	100%
8	ALTERNANTE/APL	47.1%
	ALTERNANTE/SR-LMS	52.9%

En la Tabla III se muestra el número de multiplicaciones requeridas por los algoritmos para un caso típico, donde N representa la longitud del filtro adaptativo y L es el orden de proyección. Cabe mencionar que la estructura propuesta no requiere el funcionamiento de los dos algoritmos durante todo el proceso de filtrado, por lo que el costo computacional se reduce cuando el algoritmo SR-LMS es ejecutado en vez del APL. El algoritmo propuesto comienza haciendo operaciones con el algoritmo APL que tiene una mayor velocidad de convergencia y cuando alcanza el estado estacionario cambia sus operaciones a las del algoritmo SR-LMS con lo que se reduce el costo computacional y como ya se encuentra en

estado estacionario ya no se requiere de una alta velocidad de convergencia.

TABLA IIIII

TABLA COMPARATIVA DE OPERACIONES (MULTIPLICACIONES). CASO TÍPICO: N = 8 Y L = 8.

Algoritmo	Multiplicaciones	Caso Típico
APL	$3NL + 2N + L$	216
SR-LMS	$2N + 1$	17
ALTERNANTE	$3NL + 3N + L + 1$	225
APL/SR-LMS	$3N + 2$	26
COMBINACIÓN CONVEXA	$3NL + 5N + L + 2$	242
APL/SR-LMS		

Por otra parte, la estructura alternante propuesta presenta un nivel de MSE similar al del algoritmo SR-LMS, y una velocidad de convergencia cercana al algoritmo APL, de forma que se explota las mejores características de ambos algoritmos, manteniendo un costo computacional más bajo que las combinaciones convexas. Cabe mencionar, que estas características proveen al sistema de una alta velocidad de adaptación y una mejor reducción del nivel de error, de forma que se logra rechazar o atenuar en mayor grado las señales o interferencias que llegan de direcciones diferentes a la señal deseada. Esto es de vital importancia, ya que la principal característica de los sistemas de beamforming reside en la capacidad de concentrar el patrón de radiación en las direcciones deseadas y controlar el nivel de radiaciones no deseadas, como los lóbulos laterales, los cuales normalmente recogen las señales de interferencia no deseadas.

### VI. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta un sistema de beamforming basado en un algoritmo adaptativo alternante que combina el algoritmo Sign Regressor Least Mean Square (SR-LMS) y el algoritmo Affine Projection Like (APL). Las características del algoritmo alternante propuesto lo convierten en una gran opción para el desarrollo de sistemas prácticos de beamforming al presentar un rendimiento comparable con el de sistemas similares propuestos previamente, mejorando el costo computacional. Los resultados de las simulaciones demuestran que el algoritmo propuesto presenta una alta velocidad de convergencia, similar a la del algoritmo APL, y un nivel de MSE igual al presentado por el algoritmo SR-LMS. Además, se tiene como principal ventaja un menor costo computacional comparado con el algoritmo APL y los algoritmos convexas, en los cuales los filtros que lo componen trabajan simultáneamente durante todo el proceso, lo que conlleva a un mayor costo computacional. Parte del trabajo a futuro, será la implementación de este algoritmo en dispositivos FPGA (del inglés: Field Programmable Gate Array) para validar su consumo de área/potencia.

### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y al Instituto Politécnico Nacional (IPN) por el apoyo financiero para la realización de este trabajo.

### REFERENCIAS

[1] W. Orozco-Tupacyupanqui, M. Nakano-Miyatake, and H. Perez-Meana, "A novel neural-fuzzy method to search the optimal step size

- for NLMS beamforming”, *IEEE Latin America Transactions*, 13(2), 402-408, 2015.
- [2] P. S. R. Diniz, *Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation*. Springer, New York, NY, USA, 2008.
- [3] K. Ozeki and T. Umeda, *An adaptive filtering algorithm using an orthogonal projection to an affine subspace and its properties*. *Electronics and Communications in Japan (Part I: Communications)*, 67(5), 19-27, 1984.
- [4] J. Arenas-Garcia, L. A. Azpicueta-Ruiz, M. T. Silva, V. Nascimento, and A. H. Sayed, “Combinations of adaptive filters: performance and convergence properties”. *IEEE Signal Processing Magazine*, 33(1), 120-140, 2015.
- [5] Y. R. Chien, and J. Li-You, “Convex combined adaptive filtering algorithm for acoustic echo cancellation in hostile environments”, *IEEE Access*, 6, 16138-16148, 2018.
- [6] J. Rodríguez, I. Ibarra, E. Pichardo, J. G. Avalos and J. C. Sánchez, “Convex Combination of FXECLMS Algorithms for Active Noise Control”. In *2018 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC)* (pp. 1-6). IEEE, 2018.
- [7] P. Espinosa Díaz and C. Villarroel González, “Proposición y simulación de un algoritmo adaptativo para sistemas de antenas inteligentes”, *Ingeniare Revista chilena de ingeniería*, 15(3), 344-350, 2017.
- [8] J. R. Del Ángel, A. P. Olguín, Avalos, “Combinación Convexa de los Algoritmos Affine Projection y Least Mean Square Aplicada a Sistemas de Beamforming”, *Revista Aristas*, 8(15), 172-176, 2020.
- [9] Á. A. Vázquez, E. Pichardo, J. G. Avalos, G. Sánchez, H. M. Martínez, J. C. Sánchez and H. M. Pérez, “Multichannel active noise control based on filtered-x affine projection-like and LMS algorithms with switching filter selection”, *Applied Sciences*, 9(21), 4669, 2019.